Eine Sammlung von Vorlesungen zu speziellen Themen gehalten von H.R.Petry im Sommer 1991

ausgearbeitet von
Claus Münz, Uli Bohn, Jörg Resag
Institut für theoretische Kernphysik
Nuallee 14-16
D-5300 Bonn, Germany

1991

Abstract

Die hier vorliegende Sammlung entstand aus einer Reihe von Vorlesungen, die von Prof.H.R.Petry im Sommer 1991 am Institut für theoretische Kernphysik in Bonn gehalten wurden. Die Vorlesungen wurden von Claus Münz, Uli Bohn und Jörg Resag ausgearbeitet, wobei dort, wo es für das Verständnis hilfreich ist, auch über den reinen Vorlesungsstoff hinausgegangen wurde (insbesondere bei dem Kapitel über die Symmetriebrechung in der QCD). Das Kapitel über die zweite Quantisierung wurde aus der Kursvorlesung zur relativistischen Quantenmechanik von H.R.Petry entnommen. Das Kapitel zur Bethe-Salpeter-Gleichung stammt aus einer Rechnung, die unter Anleitung von H.R.Petry in Zusammenarbeit mit B.Metsch entstand.

Contents

1 Spinoren und die Diracgleichung

Ausgearbeitet von Jörg Resag

Zur Notation:
A^* ist die konjugiert komplexe Matrix
${}^tA$ ist die transponierte Matrix
$A^+ = {}^tA^*$ ist die hermitesch adjungierte Matrix
$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$

1.1 Die Lorentzgruppe

Die Lorentzgruppe L ist definiert als die Gruppe aller Matrizen $\Lambda: \; R^4 \to R^4$, die das Lorentz-Skalarprodukt invariant lassen, d.h.

$$\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle = \langle x, y \rangle$$

wobei das Lorentz-Skalarprodukt definiert ist durch

$$\langle x, y \rangle = x^\mu y^\nu \eta_{\mu\nu} = x^0 y^0 - \vec{x}\vec{y}$$

(beachte die Summenkonvention). L ist 4-fach zusammenhängend. Die Komponente, die die 1 enthält, ist gegeben durch

$$L_+ = \{ \, \Lambda \in L, \; \det \Lambda = 1, \; \; \mathrm{sign} \, \langle e_0, \Lambda e_0 \rangle = 1 \, \}$$

Die 4 Zusammenhangskomponenten sind gekennzeichnet durch die folgende Aufteilung:

Zu jedem $\Sigma \in L$ gibt es Matrizen $\Lambda \in L_+$ und $A \in \{1, P, T, PT\}$ mit

$$\Sigma = A \Lambda$$

Es gilt nun: Zu jeder Lie-Algebra $\mathcal{L}$ gibt es eine eindeutige einfach zusammenhängende Gruppe G^0 mit $\mathcal{L}$ als Lie-Algebra. Jede weitere Gruppe G mit dieser Lie-Algebra hat G^0 als Überlagerungsgruppe, d.h. es gibt einen surjektiven Homomorphismus $\rho: \; G^0 \to G$, wobei $\ker \rho$ eine endliche Gruppe ist.

In unserem Fall ist

$$\begin{aligned} G &= L_+ \\ G_0 &= SL(2,C) \end{aligned}$$

Dabei ist $SL(2,C)$ die Gruppe aller komplexen 2×2-Matrizen g mit $\det g = 1$. Sowohl L_+ als auch $SL(2,C)$ sind 6-parametrige Gruppen. Da $1 \times SO(3) \subset L_+$ ist, ist L_+ nicht einfach zusammenhängend, dagegen ist die Überlagerungsgruppe $SL(2,C)$ einfach zusammenhängend.

Im folgenden konstruieren wir den (zweideutig) surjektiven Homomorphismus

$$\begin{aligned} \rho: \; SL(2,C) &\to L_+ \\ \text{mit} \;\; \ker \rho &= \{1,-1\} \end{aligned}$$

Sei dazu

$$H = \{A: \; C^2 \to C^2, \; A^+ = A\}$$

H ist ein 4-dimensionaler reeller Vektorraum. Eine Basis lautet

$$(\sigma_\mu) = (1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

wobei die σ_i die gewöhnlichen Pauli-Matrizen sind.

Sei nun weiter ein Vektorraumisomorphismus σ (linear und bijektiv) definiert durch

$$\begin{aligned} \sigma: \; R^4 &\to H \\ \sigma(x) &= x^\mu \sigma_\mu \end{aligned}$$

Als Matrix ausgeschrieben ist

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

Sei $g \in SL(2,C)$. Betrachte $g\,\sigma(x)\,g^+ \; \in \; H$. Da σ linear und bijektiv ist, muss es zu diesem neuen Element von H ein $x' \in R^4$ geben, dass sich durch eine lineare Abbildung Λ aus $x \in R^4$ ergibt:

$$g\,\sigma(x)\,g^+ = \sigma(\Lambda x)$$

Diese Gleichung definiert zu gegebenem $g \in SL(2,C)$ ein $\Lambda: R^4 \to R^4$.

Es gilt nun

$$\det \sigma(x) = \langle x, x \rangle$$

wie man durch direktes Berechnen der Determinante leicht sieht. Also gilt wegen $\det g = 1$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda x, \Lambda x \rangle &= \det \sigma(\Lambda x) = \\ &= \det (g\,\sigma(x)\,g^+) = \\ &= \det \sigma(x) = \\ &= \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\Lambda \in L$ ist. Da alle Abbildungen stetig sind und da $1 \in SL(2,C)$ ist, muss $\Lambda \in L_+$ sein. Um ρ noch explizit formal anzugeben, definieren wir für $g \in SL(2,C)$ die Abbildung

$$\begin{aligned} u(g):\ H &\to H \\ u(g)\,A &= g\,A\,g^+ \end{aligned}$$

Dann ist

$$\Lambda = \rho(g) = \sigma^{-1} \circ u(g) \circ \sigma$$

Zur Veranschaulichung dient das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} x \in R^4 & \overset{\longrightarrow}{\Lambda} & \Lambda x \in R^4 \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \sigma(x) \in H & \overset{u(g)}{\longrightarrow} & g\,\sigma(x)\,g^+ = \sigma(\Lambda x) \in H \end{array}$$

Man rechnet leicht nach, dass ρ ein Gruppenhomomorphismus ist, d.h. es gilt

$$\rho(g_1)\,\rho(g_2) = \rho(g_1 g_2)$$

Man kann weiter zeigen, dass ρ surjektiv ist. Der nicht ganz so triviale Beweis sei hier nicht gezeigt. Leicht dagegen sieht man aus der Definition von ρ die Zweideutigkeit

$$\rho(g_1) = \rho(g_2) \iff g_1 = \pm g_2$$

d.h. $SL(2,C)$ ist die doppelte Überlagerungsgruppe von L_+.

Beschränkt man sich auf räumliche Drehungen, so liefert ρ die doppelte Überlagerungsgruppe $SU(2) \subset SL(2,C)$ zur Drehgruppe $1 \times SO(3) \subset L_+$.

Man kann $\Lambda^\mu{}_\nu$ auch explizit aus g berechnen. Dazu benutzt man, dass gilt

$$\begin{aligned} \sigma_\mu \sigma_\nu &= 1\,\delta_{\mu\nu} + (\text{Terme} \sim \sigma_k) \\ tr\,\sigma_\mu &= 2\,\delta_{\mu 0} \\ \Rightarrow \quad tr\,\sigma_\mu \sigma_\nu &= 2\,\delta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\, tr\,(g \sigma_\nu g^+ \tilde{\sigma}^\mu)$$

mit $\tilde{\sigma}^\mu = \sigma_\mu$, vergleiche später.

Beispiele:

- Drehung um die z-Achse:

$$\begin{aligned} g &= 1\,\cos\frac{\phi}{2} + i\,\sigma_3\,\sin\frac{\phi}{2} \\ \Rightarrow \quad \Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Boost in z-Richtung:

$$\begin{aligned} g &= 1\,\cosh\frac{\phi}{2} + \sigma_3\,\sinh\frac{\phi}{2} \\ \Rightarrow \quad \Lambda &= \begin{pmatrix} \cosh\phi & 0 & 0 & \sinh\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\phi & 0 & 0 & \cosh\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2 Anwendung auf die Diracgleichung

Sei A eine komplexe 2×2-Matrix und

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. $\epsilon^2 = -1$. Wir definieren die 'classical adjoint' Matrix $\tilde{A}$ durch

$$\tilde{A} = \epsilon\, {}^t\! A\, \epsilon^{-1}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} A\,\tilde{A} &= \tilde{A}\,A = 1\ \det A \quad \text{und insbesondere} \\ \sigma(x)\,\tilde{\sigma}(x) &= \tilde{\sigma}(x)\,\sigma(x) = 1 \cdot \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

Setze nun

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(x) \\ \tilde{\sigma}(x) & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $\gamma(x)$ eine komplexe 4×4-Matrix in Blockschreibweise ist. Es gilt

$$(\gamma(x))^2 = 1 \cdot \langle x, x \rangle$$

Man kann nun $\gamma(x)$ analog zu $\sigma(x)$ schreiben als

$$\gamma(x) = x^\mu \gamma_\mu = x^\mu \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \tilde{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Die Diracmatrizen γ_μ sind hier in der Weyl-Basis angegeben. Durch einen Basiswechsel in C^4 kann man hieraus auch die Standarddarstellung erhalten. Es folgt aus der Definition von $\tilde{A}$ konsistent zu früher die Beziehung

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_0 &= \sigma_0 = 1 \\ \tilde{\sigma}_k &= -\sigma_k \\ \tilde{\sigma}^\mu &= \eta^{\mu\nu} \tilde{\sigma}_\nu = \sigma_\mu \end{aligned}$$

Die Transformationsgesetze für $\sigma, \tilde{\sigma}$ seien hier nochmal zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \sigma(\Lambda x) &= g \sigma(x) g^+ \\ \tilde{\sigma}(\Lambda x) &= (g^+)^{-1} \tilde{\sigma}(x) g^{-1} \\ \sigma_\mu \Lambda^\mu_\nu &= g \sigma_\nu g^+ \\ \tilde{\sigma}_\mu \Lambda^\mu_\nu &= (g^+)^{-1} \tilde{\sigma}_\nu g^{-1} \end{aligned}$$

Ferner erhält man für den Antikommutator

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\, \eta_{\mu\nu}$$

Weiter definieren wir die komplexe 4×4-Matrix $\hat{g}$ durch

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & (g^+)^{-1} \end{pmatrix}$$

mit $g \in SL(2, C)$.

Die Diracgleichung:

Sei

$$\psi : \; R^4 \to C^4$$

gegeben. Sei weiter $\gamma^\mu = \eta^{\mu\nu}\gamma_\nu$. Dann ist die Diracgleichung für ψ gegeben durch

$$\gamma^\mu \; (\, i\partial_\mu - eA_\mu(x) \,) \; \psi(x) = m \, \psi(x)$$

mit $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, der Masse m, der Ladung e und dem elektromagnetischen 4-er-Potential

$$A : \; R^4 \to R^4$$

Auf den Lösungen der Diracgleichung (Diracspinoren) definieren wir nun eine Darstellung von $SL(2, C)$ durch

$$(T_g \psi)(x) = \hat{g} \, \psi(\, \Lambda^{-1} \, x \,)$$

mit $\Lambda = \rho(g)$. Man rechnet leicht die Darstellungseigenschaft nach:

$$T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_1 \circ g_2}$$

Diese Darstellung entspricht der direkten Summe der definierenden Darstellung (gegeben durch die Matrizen $g \in SL(2, C)$) und der konjugierten Darstellung (gegeben durch die Matrizen $(g^+)^{-1}$). Durch die Darstellung der Überlagerungsgruppe $SL(2, C)$ wird eine Strahldarstellung der eigentlichen Lorentzgruppe L_+ auf den Äquivalenzklassen $[\psi]$ gegeben. Die Äquivalenzklasse ist dabei gegeben durch die Menge aller ψ, die sich nur um eine Phase $e^{i\phi}$ unterscheiden.

Die Lösungen der Diracgleichung bilden nun einen unter T_g invarianten Unterraum aus der Menge aller ψ (man sagt auch: die Diracgleichung ist relativistisch invariant). Das bedeutet:

Sei ψ Lösung der Diracgleichung, d.h.

$$\gamma^\mu \, (\, i\partial_\mu - eA_\mu(x)\,)\; \psi(x) = m\,\psi(x)$$

Dann ist $T_g\psi$ wieder eine Lösung der Diracgleichung, d.h.

$$\gamma^\mu \, \Big(i\partial_\mu - eA'_\mu(x) \Big) \; (T_g\psi)(x) = m\,(T_g\psi)(x)$$

Dabei ist

$$A'_\mu(x) = (T_\Lambda A)_\mu(x) = \Lambda_\mu^{\ \nu}\, A_\nu(\Lambda^{-1}\, x)$$

(Dies ist die Darstellung von L_+ auf den Vierervektoren) mit $\Lambda^\mu_{\ \nu}\,\Lambda_\rho^{\ \nu} = \delta_\rho^{\ \mu}$.

Beim Beweis wird man auf die Beziehung

$$\Lambda^\mu_{\ \nu}\,\gamma^\nu = \hat{g}^{-1}\,\gamma^\mu\,\hat{g}$$

geführt, die man leicht mit Hilfe der Definition von ρ zeigen kann. In den meisten Texten zur Diracgleichung fordert man umgekehrt die Invarianz der Diracgleichung unter der Transformation von ψ und erhält die obige Beziehung als Bestimmungsgleichung für $\hat{g} =: S(\Lambda)$.

1.3 Die Paritätstransformation

Wir wollen nun das Transformationsgesetz für Diracspinoren unter der Paritätstransformation P ableiten. Da $P \notin L_+$ ist, kann man das bisherige Transformationsgesetz nicht anwenden, da es kein $g \in SL(2,C)$ gibt mit $\rho(g) = P$. Wir fordern also umgekehrt die Invarianz der Diracgleichung im obigen Sinn unter der Transformation

$$(T_P\psi)(x) = S(P)\,\psi(Px)$$

und bestimmen daraus $S(P)$. Das Transformationsgesetz für A_μ ist für $\Lambda = P$ genau das gleiche wie für $\Lambda \in L_+$. Es wird festgelegt durch die Kopplung der Felder an ihre Quellen in den Maxwellgleichungen. Die Felder A_μ transformieren sich dabei unter allgemeinen Lorentztransformationen genauso wie der 4-er-Strom j_μ. Wir erhalten daher analog zu vorher die Beziehung

$$P^\mu_{\ \nu}\,\gamma^\nu = (S(P))^{-1}\,\gamma^\mu\,S(P)$$

als Bestimmungsgleichung für $S(P)$. Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$S(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma_0$$

Somit gilt:

$$(T_P \psi)(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi(Px)$$

1.4 Die Zeitumkehrtransformation

Das Transformationsverhalten von ψ unter der Zeitumkehrtransformation T wird nun analog zu P bestimmt. Um Invarianz der Diracgleichung zu erreichen, muss allerdings der Ansatz abgeändert werden zu

$$(T_T \psi)(x) = S(T)\, \psi^*(Tx)$$

Für die bisher betrachteten Fälle hätte man sich auf die freie Diracgleichung ($A_\mu = 0$) beschränken können, da sich A_μ wie ∂_μ transformiert hat. Das ist anders bei der Zeitumkehr, denn $\vec{A}$ wird durch Ströme erzeugt, die unter T wie Geschwindigkeiten ihr Vorzeichen ändern. Hingegen behält A_0 analog zu statischen Ladungsverteilungen sein Vorzeichen. Daher gilt:

$$(T_T A)_\mu(x) = -T_\mu^{\ \nu}\, A_\nu(Tx)$$

Für beliebige Lorentztransformationen kann man das Transformationsverhalten von A daher schreiben als

$$(T_\Lambda A)_\mu(x) = \Lambda_\mu^{\ \nu}\, A_\nu(\Lambda^{-1} x)\, \mathrm{sign}(\langle e_0, \Lambda e_0 \rangle)$$

Der Vorzeichenwechsel von A bewirkt das komplexe Konjugieren von ψ im Transformationsgesetz. Für die Zeitumkehr muss man daher die Invarianz der Diracgleichung *mit* äusserem Feld fordern. Wir erhalten dann die Beziehung

$$T^\mu_{\ \nu}\, \gamma^\nu = -(S(T))^{-1}\, (\gamma^\mu)^*\, S(T)$$

als Bestimmungsgleichung für $S(T)$. Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$S(T) = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$(T_T\psi)(x) = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \psi^*(Tx)$$

1.5 Die Ladungskonjugation

Die Ladungskonjugation C bildet Lösungen der Diracgleichung mit Ladung e und Energie E ab auf Lösungen der Diracgleichung mit Ladung $-e$ und Energie $-E$. Wir fordern also: Sei ψ Lösung von

$$\gamma^\mu \; (\, i\partial_\mu - eA_\mu(x) \,) \; \psi(x) = m \, \psi(x)$$

Dann ist $T_C\psi$ Lösung von

$$\gamma^\mu \; (\, i\partial_\mu + eA_\mu(x) \,) \; (T_C\psi)(x) = m \, (T_C\psi)(x)$$

Die Eigenschaft bezüglich der Energie werden wir erst später betrachten, da wir dazu die allgemeine Lösung der freien Diracgleichung und die Fouriertransformation brauchen. Der Wechsel des Energievorzeichens bezieht sich also auf Lösungen der freien Diracgleichung, hingegen bezieht sich der Wechsel des Ladungsvorzeichens auf Lösungen im elektromagnetischen Feld, da die Ladung nur durch die Ankopplung an dieses Feld definiert ist. Da unter C ähnlich wie unter T das Vorzeichen von eA_μ wechselt, machen wir analog den Ansatz

$$(T_C\psi)(x) = S(C) \, \psi^*(x)$$

Wir erhalten dann die Beziehung

$$\gamma^\mu = -S(C) \, (\gamma^\mu)^* \, (S(C))^{-1}$$

als Bestimmungsgleichung für $S(C)$. Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$S(C) = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$(T_C\psi)(x) = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix} \psi^*(x)$$

1.6 Strom und Skalarprodukt

Seien ψ, ψ' zwei Lösungen der freien Diracgleichung. Definiere den Strom als

$$j(\psi, \psi')_\mu = \bar{\psi}(x)\, \gamma_\mu\, \psi'(x)$$

mit $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0$. Der Strom ist erhalten, d.h. er erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j(\psi, \psi')^\mu(x) = 0$$

wie man durch einfaches Nachrechnen unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, \psi'(x) &= 0 \\ -i\partial_\mu\, \bar{\psi}(x)\, \gamma^\mu - m\bar{\psi}(x) &= 0 \end{aligned}$$

erhält. Weiter rechnet man leicht das Transformationsverhalten nach:

$$\begin{aligned} j(T_g\psi,\, T_g\psi')_\mu(x) &= \Lambda_\mu^{\ \nu}\, j(\psi, \psi')_\nu(\Lambda^{-1}x) \ \text{ für } \ \Lambda \in L_+ \ \text{ oder } \ \Lambda = P \\ j(T_T\psi,\, T_T\psi')_\mu(x) &= -T_\mu^{\ \nu}\, j(\psi^*, \psi'^*)_\nu(Tx) \ \text{ für } \ \Lambda = T \end{aligned}$$

Wir definieren nun das Skalarprodukt von zwei Diracspinoren durch

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \int_{V_t} j(\psi, \psi')_0(x)\, d^3x = \int_{V_t} \psi^+(x)\, \psi'(x)\, d^3x$$

mit $V_t = \{x \in R^4,\, x^0 = t\}$. Dieses Skalarprodukt ist unabhängig von t. Zum Beweis definieren wir das Volumen V als

$$V = \{x \in R^4,\, t < x^0 < t'\}$$

d.h. der Rand ∂V von V besteht aus V_t, $V_{t'}$ und den unendlich fernen Rändern $|\vec{x}| \to \infty$. Es gelte nun die Randbedingung, dass $\psi(x)$ genügend schnell gegen 0 geht für $|\vec{x}| \to \infty$. Dann folgt aus $\partial_\mu j^\mu = 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \partial_\mu j(\psi, \psi')^\mu(x)\, d^4x = \\ &= \int_{\partial V} j(\psi, \psi')_\mu(x)\, dV^\mu = \\ &= \int_{V_{t'}} j(\psi, \psi')_0(x)\, d^3x - \int_{V_t} j(\psi, \psi')_0(x)\, d^3x \end{aligned}$$

Damit ist die Unabhängigkeit von t gezeigt. Ähnlich kann man die Invarianz unter Lorentztransformationen zeigen. Der Beweis soll hier ohne formale Exaktheit durchgeführt werden. Eine korrektere Schreibweise kann man mit Differentialformen erreichen. Es gilt

$$\begin{aligned} & \int_{V_t} j(T_g\psi, T_g\psi')_0(x)\, d^3x - \int_{V_t} j(\psi,\psi')_0(x)\, d^3x = \\ = & \int_{\Lambda V_t} j(\psi,\psi')_\mu(x)\, dV^\mu - \int_{V_t} j(\psi,\psi')_0(x)\, d^3x = \\ = & \int_V \partial_\mu j(\psi,\psi')^\mu(x)\, d^4x = 0 \end{aligned}$$

Zusammen mit diesem Skalarprodukt bilden die Diracspinoren (evtl. nach Vervollständigen) einen Hilbertraum. Man kann nun die Fouriertransformierten bilden, ohne den Lösungsraum zu verlassen.

1.7 Lösung der freien Diracgleichung durch Fouriertransformation

Definiere die Fouriertransformation durch

$$\psi(x) = N \int \frac{d^3p}{|p^0|}\, \psi(p)\, e^{-i\langle p,x\rangle}$$

mit einer Normierungskonstante N. Auf ein neues Symbol für den fouriertransformierten Diracspinor wurde verzichtet. Die Division durch $|p^0|$ hat hier noch keine direkt einsehbare Funktion. Sie bewirkt später die Invarianz des Volumenelements

$$\frac{d^3p}{|p^0|} = 2\, d^4p\, \delta(p^2 - m^2)$$

für $p^2 = \langle p,p\rangle$, $(p^0)^2 = m^2 + \vec{p}^2$. Die Beziehung für $p^0 = p^0(\vec{p})$ wird noch hergeleitet.

Die freie Diracgleichung im Impulsraum lautet dann

$$(\gamma(p) - m)\, \psi(p) = 0$$

Setzt man nun für $\psi(p)$ den Ansatz

$$\psi(p) = \begin{pmatrix} \xi(p) \\ \eta(p) \end{pmatrix}$$

in die Diracgleichung ein, so erhält man

$$\eta(p) = \frac{\tilde{\sigma}(p)}{m}\,\xi(p)$$

Die allgemeine Lösung der Diracgleichung im Impulsraum in der Weyl-Basis lautet also

$$\psi(p) = \begin{pmatrix} \xi(p) \\ \frac{\tilde{\sigma}(p)}{m}\,\xi(p) \end{pmatrix}$$

Der 4-komponentige Diracspinor $\psi:\ R^4 \to C^4$ ist also durch die 2-komponentige Funktion $\xi:\ R^4 \to C^2$ eindeutig festgelegt.

Wendet man $\gamma(p)$ auf die Diracgleichung an und verwendet $(\gamma(p))^2 = \langle p, p\rangle = p^2$ sowie $\gamma(p)\,\psi(p) = m\,\psi(p)$, so folgt als notwendige Nebenbedingung

$$p^2 = m^2 \iff p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

d.h. der Träger von $\psi(p)$ bzw. $\xi(p)$ sind die positive und negative Massenschale.

1.8 Symmetrien auf den 2er-Spinoren im Impulsraum

Wir definieren allgemein $T_g\xi$ durch

$$(T_g\psi)(x) = N\int \frac{d^3p}{|p^0|}\,e^{-i\langle p,x\rangle}\begin{pmatrix} (T_g\xi)(p) \\ \frac{\tilde{\sigma}(p)}{m}\,(T_g\xi)(p) \end{pmatrix}$$

für $g \in SL(2,C)$, aber auch für $g = P, T, C$.

1.8.1 Eigentliche Lorentztransformationen

Sei $g \in SL(2,C)$. Wir verwenden nun die Definition von $T_g\psi$ sowie die Definition der Fouriertransformation, um $T_g\xi$ zu bestimmen. Dabei erhalten wir im Exponenten der e-Funktion

$$\left\langle p, \Lambda^{-1}x\right\rangle = \left\langle \Lambda p, \Lambda\Lambda^{-1}x\right\rangle = \langle \Lambda p, x\rangle$$

Nun substituieren wir $\Lambda p = q$ und verwenden die Invarianz des Volumenelements $d^3p/|p^0|$. Hier erweist sich also unsere Definition der Fouriertransformation als sinnvoll. In der unteren Komponente verwenden wir

$$(g^+)^{-1}\tilde{\sigma}(\Lambda^{-1}q)\,\xi(\Lambda^{-1}q) = (g^+)^{-1}\tilde{\sigma}(\Lambda^{-1}q)\,g^{-1}g\,\xi(\Lambda^{-1}q) = \tilde{\sigma}(p)\,g\,\xi(\Lambda^{-1}q)$$

und setzen wieder $q = p$. Damit erhalten wir durch Vergleich mit der Definition von $T_g\xi$ die Beziehung

$$(T_g\xi)(p) = g\,\xi(\Lambda^{-1}p)$$

1.8.2 Paritätstransformation

Sei $g = P$. Wegen der Definition von $T_P\psi$ werden obere und untere Komponente im Diracspinor vertauscht und im Exponenten der e-Funktion entsteht

$$\langle p, Px\rangle = \langle Pp, x\rangle$$

Substituiere nun $q = Pp$, wobei das Volumenelement invariant bleibt. In der oberen Komponente ist

$$\tilde{\sigma}(Pq) = \sigma(q)$$

und in der unteren Komponente ist

$$\xi(Pq) = \frac{q^2}{m^2}\,\xi(Pq) = \frac{\tilde{\sigma}(q)}{m}\frac{\sigma(q)}{m}\,\xi(Pq)$$

Setzen wir wieder $q = p$, so erhalten wir

$$(T_P\xi)(p) = \frac{\sigma(p)}{m}\,\xi(Pp)$$

P macht also aus dem Viererimpuls p den Impuls Pp, dreht also die räumliche Komponente um, vertauscht aber nicht die Massenschalen.

1.8.3 Zeitumkehr

Sei $g = T$. Im Exponenten erhalten wir durch das komplexe Konjugieren

$$+i\,\langle p, Tx\rangle = +i\,\langle Tp, x\rangle = -i\,\langle Pp, x\rangle$$

Substituiere nun wie oben $q = Pp$, verwende in der unteren Komponente

$$\epsilon\,\tilde{\sigma}^*(Pq) = \epsilon\,\sigma^*(q)\,\epsilon^{-1}\epsilon = \tilde{\sigma}(q)\,\epsilon$$

und setze wieder $q = p$, so erhält man

$$(T_T\xi)(p) = \epsilon\,\xi^*(-Tp)$$

T dreht also wie P die räumliche Komponente von p um und vertauscht nicht die Massenschalen.

1.8.4 Ladungskonjugation

Sei $g = C$. Die Ladungskonjugation vertauscht die Komponenten im Diracspinor und liefert durch das komplexe Konjugieren im Exponenten

$$+i\,\langle p, x\rangle = -i\,\langle -p, x\rangle$$

Substituiere $q = -p$, verwende in der oberen Komponente

$$\epsilon\,\tilde{\sigma}^*(-q) = \epsilon\,\epsilon\,{}^t\sigma^*(-q)\epsilon^{-1} = \sigma(-q)\,\epsilon = -\sigma(q)\,\epsilon$$

und in der unteren Komponente

$$-\epsilon\xi^*(-q) = \frac{q^2}{m^2}\,(-\epsilon)\xi^*(-q) = \frac{\tilde{\sigma}(q)}{m}\frac{\sigma(q)}{m}\,(-\epsilon)\xi^*(-q)$$

Setzt man nun wieder $q = p$, so erhält man

$$(T_C\xi)(p) = -\frac{\sigma(p)}{m}\,\epsilon\,\xi^*(-p)$$

C dreht also zum einen $\vec{p}$ um und vertauscht zum anderen die Massenschalen. Das sieht man noch deutlicher, indem man für Funktionen $f(p)$ (mit der positiven und negativen Massenschale als Träger) nun Funktionen $f_\pm(p)$ (mit entweder der positiven oder der negativen Massenschale als Träger) definiert durch

$$f_\pm(p) = f(p)\,\theta(\pm p^0)$$

Dann gilt entsprechend

$$f_\pm(-p) = f(-p)\,\theta(\mp p^0)$$

Multipliziert man die Gleichung für $T_C\xi$ mit $\theta(\pm p^0)$, so erhält man

$$(T_C\xi)_\pm(p) = -\frac{\sigma(p)}{m}\,\epsilon\,\xi^*_\mp(-p)$$

1.8.5 Skalarprodukt

Wir definieren das Skalarprodukt der Spinoren ξ durch

$$\langle \xi, \xi' \rangle := \langle \psi, \psi' \rangle$$

wobei wir für beide (verschiedenen) Skalarprodukte das gleiche Symbol $\langle \; , \; \rangle$ verwendet haben. ψ und ξ sind dabei durch die Fouriertransformation miteinander verknüpft. Man berechnet leicht

$$\langle \psi, \psi' \rangle = N^2 (2\pi)^3 \frac{2}{m^2} \, \mathrm{sign}(p^0) \; \int \frac{d^3p}{|p^0|} \, \xi^+(p) \, \tilde{\sigma}(p) \, \xi'(p)$$

Setzt man

$$N = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{m}{\sqrt{2}}$$

so ist damit das invariante Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle \xi, \xi' \rangle = \mathrm{sign}(p^0) \; \int \frac{d^3p}{|p^0|} \, \xi^+(p) \, \tilde{\sigma}(p) \, \xi'(p)$$

2 Zweite Quantisierung für Fermionen

Ausgearbeitet von Jörg Resag

2.1 Definition des Fockraums für Fermionen

Sei $\mathcal{H}^1$ ein beliebiger 1-Fermion-Hilbertraum (z.B. die Lösungen der Diracgleichung zu positiven Energien). Dann ist der zugehörige Mehrteilchen-Hilbertraum (auch *Fockraum* genannt) gegeben durch die *Äussere Algebra* (auch Grassmann-Algebra genannt) von $\mathcal{H}^1$, die wir mit $\Lambda\,\mathcal{H}^1$ bezeichnen.

Zwischenbemerkung: Das *Tensorprodukt* $A \otimes B$ zweier VektorrÄume A und B ist gegeben durch die Menge der Paare $(a, b) =: a \otimes b,\ a \in A,\ b \in B$ mit

$$\begin{aligned} (a + a') \otimes b &= a \otimes b \,+\, a' \otimes b \\ a \otimes (b + b') &= a \otimes b \,+\, a \otimes b' \\ \lambda\,(a \otimes b) &= (\lambda a) \otimes b = a \otimes (\lambda b), \quad \lambda \in C \end{aligned}$$

Analog sind die höheren Tensorprodukte zu bilden. Sind A, B z.B. HilbertrÄume von Funktionen, so ist

$$\langle x_1, x_2 \mid a \otimes b \rangle = a(x_1) \cdot a(x_2)$$

die entsprechende Koordinatendarstellung.

Zum Vergleich: bei der direkten Summe $(a, b) =: a + b$ fordert man

$$\lambda\,(a + b) = (\lambda a) + (\lambda b)$$

Die Äussere Algebra $\Lambda_n \mathcal{H}^1$ ist definiert als das antisymmetrisierte n-fache Tensorprodukt von $\mathcal{H}^1$, d.h. für $x_i \in \mathcal{H}^1$ ist $v \in \Lambda_n \mathcal{H}^1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} v &= x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \\ &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

wobei S_n die Menge der Permutationen von n Elementen ist, $\mathrm{sign}(\sigma)$ ist das Signum der Permutation und $\otimes$ kennzeichnet das Tensorprodukt von

Vektoren. Die Antisymmetrisierung wird durch das *Pauliprinzip* erzwungen. Sei weiter

$$\Lambda_0 \mathcal{H}^1 := C = Span(|0\rangle)$$

wobei C die Menge der komplexen Zahlen ist. Den Basisvektor $|0\rangle$ bezeichnet man als Vakuum. Dann ist der Mehrteilchen-Hilbertraum gegeben durch

$$\Lambda\,\mathcal{H}^1 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda_n \mathcal{H}^1$$

mit der EinschrÄnkung, dass die ZustÄnde endliche Norm haben sollen.

Zur Definition der Norm verwenden wir das induzierte Skalarprodukt in $\Lambda_n \mathcal{H}^1$

$$\langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_n,\ w_1 \wedge \ldots \wedge w_n \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle)$$

wobei wir für die Skalarprodukte in den verschiedenen RÄumen das gleiche Symbol verwenden. Fordern wir weiter

$$\begin{aligned} \langle 0, 0 \rangle &= 1 \text{ für } \ |0\rangle \in \Lambda_0 \mathcal{H}^1 \\ \langle v, w \rangle &= 0 \text{ für } \ v \in \Lambda_n \mathcal{H}^1\ ,\ \ w \in \Lambda_m \mathcal{H}^1\ ,\ \ n \neq m \end{aligned}$$

so wird dadurch ein Skalarprodukt auf $\Lambda\,\mathcal{H}^1$ definiert.

Wir definieren nun den *Erzeugungsoperator* eines Fermions im Zustand $v \in \mathcal{H}^1$ durch

$$\begin{aligned} a^+ : \mathcal{H}^1 &\Longrightarrow L(\Lambda\,\mathcal{H}^1) \\ a^+(v)w &= v \wedge w \end{aligned}$$

mit $v \in \mathcal{H}^1,\ w \in \Lambda_n \mathcal{H}^1,\ a^+(v)w \in \Lambda_{n+1}\mathcal{H}^1$. Dabei sind $L(\Lambda\,\mathcal{H}^1)$ die linearen Abbildungen in $\Lambda\,\mathcal{H}^1$. Wie man sieht, ist $a^+(v)$ auch in v linear. Weiter sei $a^+(v)\,|0\rangle = v$. Die Abbildung a^+ ist somit eine operatorwertige Distribution.

Ist e_i eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}^1$ mit $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, so ist durch

$$a^+_{k_1} \cdots a^+_{k_n}\,|0\rangle = e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_n}$$

mit $a^+_i = a^+(e_i)$ und $k_1 \neq k_2 \neq \cdots k_n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ eine Orthonormalbasis in $\Lambda_n \mathcal{H}^1$ gegeben.

Sei $a(v)$ der zu $a^+(v)$ hermitesch adjungierte Operator im Sinne des oben definierten Skalarproduktes, d.h.

$$\langle a(v)x, y\rangle := \left\langle x, a^+(v)y\right\rangle$$

Durch $a(v)$ wird ein Fermion vernichtet. Man definiert weiter

$$a(v)\,|0\rangle = 0$$

wobei 0 den Nullvektor und $|0\rangle$ das Vakuum meint. Wegen der AntilinearitÄt des Skalarproduktes in der ersten Komponente und der LinearitÄt von $a^+(v)$ in v ist $a(v)$ antilinear in v, also

$$a(\lambda v) = \lambda^*\, a(v)\ , \quad \lambda \in C$$

Konstruiert man $a(v)$ explizit, so erhÄlt man

$$\begin{aligned} & a(v)\, x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \\ & = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+1}\ \langle v, x_i\rangle\ x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_i \wedge \ldots \wedge x_n \end{aligned}$$

mit $v, x_i \in \mathcal{H}^1$. Dabei bedeutet $\hat{x}_i$, dass dieses x_i im Dachprodukt weggelassen wird.

Man rechnet nach, dass für den Antikommutator $\{A, B\} = AB + BA$ gilt:

$$\begin{aligned} \{a^+(v), a^+(w)\} &= 0 \\ \{a(v), a(w)\} &= 0 \\ \{a(v), a^+(w)\} &= \langle v, w\rangle\ 1 \end{aligned}$$

wobei 1 den IdentitÄtsoperator auf $\Lambda\,\mathcal{H}^1$ meint. Mit Hilfe der oben eingeführten Orthonormalbasis e_i kann man auch schreiben

$$\begin{aligned} \{a_i^+, a_j^+\} &= 0 \\ \{a_i, a_j\} &= 0 \\ \{a_i, a_j^+\} &= \delta_{ij}\, 1 \end{aligned}$$

2.2 Der Lift von Operatoren

Sei nun $H : \mathcal{H}^1 \longrightarrow \mathcal{H}^1$ ein linearer hermitescher 1-Teilchen-Operator. Wir definieren nun den *geliфteten Operator* $\hat{H} : \Lambda\mathcal{H}^1 \longrightarrow \Lambda\mathcal{H}^1$ im Fockraum durch

$$
\begin{aligned}
\hat{H}\, v_1 \wedge \ldots \wedge v_n &= (Hv_1) \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_n + \\
&+ v_1 \wedge (Hv_2) \wedge \ldots \wedge v_n + \\
&+ \cdots + \\
&+ v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge (Hv_n)
\end{aligned}
$$

Dies ist die bekannte Formel, die man erhÄlt, wenn man $\hat{H}$ als Summe von 1-Teilchen-Operatoren $H(i)$ schreibt, die dann jeweils nur auf das i-te Teilchen wirken. Man kann nun zeigen, dass sich $\hat{H}$ bezüglich der ONBasis e_i schreiben lÄsst als

$$\hat{H} = \sum_k a^+(He_k)\, a(e_k) = \sum_{k,l} H_{kl}\, a_k^+ a_l$$

mit $H_{kl} = \langle e_k, He_l \rangle$. Der Beweis macht dabei Gebrauch von dem Kommutator

$$[\hat{H}, a^+(v)] = a^+(Hv)$$

Man beachte, dass wegen der unendlichen Summe $\sum_k$ Konvergenzprobleme auftreten können, so dass die obige Formel unter UmstÄnden nur formale Bedeutung hat.

Analog erhÄlt man für den Lift eines 2-Teilchenoperators V (z.B. das elektrische Potential) in der ONBasis den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
\hat{V} &= \sum_{i,j,k,l} V_{ij,kl}\, a_i^+ a_j^+ a_k\, a_l \\
\text{mit } V_{ij,kl} &= \langle e_i \wedge e_j,\, V\ e_k \wedge e_l \rangle
\end{aligned}
$$

Dies kann man auch für MehrteilchenkrÄfte verallgemeinern.

Der *Lift unitÄrer Operatoren U* wird abweichend von der obigen Definition nun definiert durch

$$
\begin{aligned}
\hat{U}\ v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_n &:= Uv_1 \wedge Uv_2 \wedge \ldots \wedge Uv_n \\
\hat{U}\ |0\rangle &:= |0\rangle
\end{aligned}
$$

Dies entspricht z.B. genau der Transformationsvorschrift für die gleichzeitige Drehung mehrerer Teilchen. Das Vakuum sei invariant dabei (diese Forderung ist insbesondere im Hinblick auf spontane Symmetriebrechung interessant, da sie dort für die gebrochene Symmetrie nicht erfüllt ist). $\hat{U}$ ist unitÄr bezüglich des induzierten Skalarproduktes im Fockraum.

Sei eine unitÄre Schar von Operatoren

$$U(t) = e^{iAt}$$

gegeben. Dann gilt für den Lift

$$\hat{U}(t) = e^{i\hat{A}t}$$

Auf diese Art erhÄlt man Darstellungen von Liegruppen auf dem Fockraum. Dabei bilden die einzelnen $\Lambda_n \mathcal{H}^1$ irreduzible DarstellungsrÄume.

Der *Teilchenzahloperator* N ist nun definiert als der Lift des Einsoperators 1 von $\mathcal{H}^1$

$$N = \hat{1} = \sum_k a_k^+ a_k$$

Es folgt

$$\begin{aligned} N\, v_1 \wedge \ldots \wedge v_n &= n\, v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \\ [N, a^+(v)] &= a^+(v) \\ [N, a(v)] &= -a(v) \end{aligned}$$

Man hat damit eine formale Analogie zu Auf- und Absteigeoperatoren beim harmonischen Oszillator erhalten.

Es gilt nun der folgende Satz:
Sei $F(\mathcal{H}^1)$ ein Hilbertraum. Sei weiter

$$b^+ : \mathcal{H}^1 \Longrightarrow L(F(\mathcal{H}^1))$$

eine operatorwertige lineare Distribution und $b(v) := (b^+(v))^+$ der hermitesch adjungierte Operator zu $b^+(v)$. Es seien dieselben Antivertauschungsrelationen wie vorher

$$\begin{aligned} \{b^+(v), b^+(w)\} &= 0 \\ \{b(v), b(w)\} &= 0 \\ \{b(v), b^+(w)\} &= \langle v, w\rangle\, 1 \end{aligned}$$

gültig. Es existiere weiter ein (bis auf Multiplikation) eindeutiger Vakuumzustand $|0\rangle \in F(\mathcal{H}^1)$ mit

$$b(v)\ |0\rangle = 0 \ \text{ für alle } \ v \in \mathcal{H}^1$$

Dann gibt es eine unitÄre Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \hat{U} :\ \Lambda\mathcal{H}^1 & \longrightarrow & F(\mathcal{H}^1) \\ \text{mit } \hat{U}\, a^+(v)\, \hat{U}^{-1} & = & b^+(v) \end{array}$$

d.h. die beiden Darstellungen der Antivertauschungsrelationen sind unitÄr Äquivalent. Dabei ist die Forderung nach einem eindeutigen Vakuumzustandes sehr wichtig, da sonst der Satz nicht gilt.

Beispiele:
Sei im Folgenden $F(\mathcal{H}^1) = \Lambda\mathcal{H}^1$.

- Sei $U :\ \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^1$ unitÄr. Dann sind durch

$$\begin{array}{rcl} b^+(v) & = & a^+(Uv) \\ b(v) & = & a(Uv) \end{array}$$

  Operatoren im obigen Sinn gegeben. Nach dem Satz gilt

$$\begin{array}{rcl} \hat{U}\, a^+(v)\, \hat{U}^{-1} & = & a^+(Uv) \\ \hat{U}\, a(v)\, \hat{U}^{-1} & = & a(Uv) \end{array}$$

  Man rechnet leicht nach, dass dabei $\hat{U}$ der Lift von U ist.

- Sei der Einteilchenraum zerlegt in die direkte Summe zweier TeilrÄume $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^1_1 \oplus \mathcal{H}^1_2$. Sei $v = v_1 \oplus v_2 \in \mathcal{H}^1_1 \oplus \mathcal{H}^1_2$. und sei $A : \mathcal{H}^1_2 \to \mathcal{H}^1_2$ ein antiunitÄrer Operator, d.h.

$$\begin{array}{rcl} < Av, Aw > & = & < w, v > \\ A\,\lambda v & = & \lambda^*\, Av \end{array}$$

  Dann sind durch

$$\begin{array}{rcl} b^+(v) & = & a^+(v_1) + a(Av_2) \\ b(v) & = & a(v_1) + a^+(Av_2) \end{array}$$

Operatoren gegeben, die die Antivertauschungsrelationen erfüllen. Allerdings ist $b(v)\,|0\rangle \neq 0$, so dass die Voraussetzungen des obigen Satzes nicht erfüllt sind. Man kann allerdings einen anderen Fockraum $F(\mathcal{H}^1) \neq \Lambda\mathcal{H}^1$ mit einem anderen Vakuum $|0\rangle_F \neq |0\rangle$ definieren, so dass $b(v)\,|0\rangle_F = 0$ gilt.

2.3 Anwendung auf die Diracgleichung

Sei $\mathcal{H}_D = \mathcal{H}_D^+ \oplus \mathcal{H}_D^-$ der Raum der Lösungen $\psi(x)$ der freien Diracgleichung, wobei $\mathcal{H}_D^+$ der Raum der Lösungen zu positiver Energie und $\mathcal{H}_D^-$ der Raum der Lösungen zu negativer Energie ist. Die Lösungen positiver Energie sind dadurch gekennzeichnet, dass sie sich als Fouriertransformierte von Funktionen mit der positiven (negativen) Massenschale als TrÄger darstellen lassen. Die Lösungen negativer Energie sind physikalisch zunÄchst nicht sinnvoll. Sobald man Äussere Potentiale berücksichtigt, treten sie aber im zeitlichen Verlauf unvermeidlich auf, selbst wenn man mit einer Lösung positiver Energie startet. Um zu einer physikalisch sinnvollen Theorie mit Wechselwirkung zu gelangen, muss man daher von der 1-Teilchentheorie zur Vielteilchentheorie übergehen. Wechselwirkungen werden dann mit Hilfe der S-Matrix im Rahmen einer Streutheorie mit asymptotisch freien VielteilchenzustÄnden beschrieben. Wir bemühen uns nun im Folgenden um eine Beschreibung dieser asymptotisch freien ZustÄnde.

Sei dazu $\mathcal{H}_{el} = \mathcal{H}_{pos} := \mathcal{H}_D^+$, wobei $\mathcal{H}_{el}$ für Elektron-ZustÄnde und $\mathcal{H}_{pos}$ für Positron-ZustÄnde steht. Dabei ist die Energie stets positiv, d.h. diese 1-TeilchenrÄume sind physikalisch sinnvoll. Sie sind beide mathematisch identisch, da wir hier nur Lösungen der *freien* Diracgleichung betrachten. Bei Berücksichtigung eines Äusseren elektrischen Feldes würden sie aber in verschiedene RÄume übergehen, die jeweils aus Lösungen der vollen Diracgleichung zu verschiedenem Ladungsvorzeichen bestehen. Da aber Lösungen zu umgekehrtem Ladungsvorzeichen und positiver Energie aus Lösungen mit altem Ladungsvorzeichen und negativer Energie durch Ladungskonjugation C entstehen, erhalten wir den Zusammenhang mit den gesamten Lösungen der Diracgleichung durch die Abbildung

$$\begin{aligned} f:\ \mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_{el} \oplus \mathcal{H}_{pos} \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{H}_D = \mathcal{H}_D^+ \oplus \mathcal{H}_D^- \\ f(v_{el} + v_{pos}) \quad &= \quad v_{el} + C v_{pos} =: v^+ + v^- \end{aligned}$$

d.h. $v_{el} = v^+$, $Cv_{pos} = v^-$. Die Ladungskonjugation C ist dabei antiunitÄr (vgl. oben). Wir bilden nun den Fockraum der Lösungen der Diracgleichung $\Lambda\mathcal{H}_D$ mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\begin{aligned} b^+(v^+ + v^-) &= b^+(v^+) + b^+(v^-) \\ b(v^+ + v^-) &= b(v^+) + b(v^-) \end{aligned}$$

Mit $b(v^+ + v^-)\,|0\rangle_D = 0$ für das Vakuum. Das Energiespektrum von $\Lambda\mathcal{H}_D$ ist aber unphysikalisch, da es negative Energien enthÄlt. Insbesondere ist das Vakuum $|0\rangle_D$ nicht der Zustand mit niedrigster Energie, da z.B. $b^+(v^-)\,|0\rangle_D$ ein Zustand mit niedrigerer Energie ist.

Wir bilden daher nun $\Lambda\mathcal{H}_{tot}$. Dieser Vielteilchenraum enthÄlt nur ZustÄnde zu positiver Energie. Durch

$$\begin{aligned} a^+(v_{el} + v_{pos}) &= a^+(v_{el}) + a^+(v_{pos}) = \\ &:= b^+(v^+) + b(v^-) = \\ &= b^+(v_{el}) + b(Cv_{pos}) \\ a(v_{el} + v_{pos}) & \quad \text{analog} \end{aligned}$$

ist dann eine Darstellung der Antivertauschungsrelationen in $\Lambda\mathcal{H}_{tot}$ gegeben (vgl. Beispiel oben). Da b und C antilinear sind, ist a^+ linear in v_{pos}. Das Vakuum $|0\rangle$ erfülle dabei $a(v_{el} + v_{pos})\,|0\rangle = 0$. Es ist damit der Zustand niedrigster Energie. Man kann den Zusammenhang zu $|0\rangle_D$ formal herstellen durch

$$|0\rangle = \prod_{k=1}^{\infty} b^+(e_k^-)\,|0\rangle_D$$

wobei e_k^- eine Basis von $\mathcal{H}_D^-$ ist. Es werden also alle ZustÄnde negativer Energie besetzt. Wegen des unendlichen Produktes liegen $|0\rangle$, $|0\rangle_D$ nicht im gleichen Fockraum. Vielmehr wÄre $|0\rangle$ als eine Art *kollektive Anregung* aufzufassen.

Man gelangt also zu dem physikalisch sinnvollen Vakuum und damit Fockraum dadurch, dass man fordert, dass der Energie-Erwartungswert des Vakuums minimal sein soll. Dieses Variationsprinzip bewÄhrt sich auch im Zusammenhang mit spontaner Symmetriebrechung.

Sei nun $v = v_{el} + v_{pos}$ und seien

$$\Psi(v) = a(v_{el}) + a^+(v_{pos})$$

$$
\begin{aligned}
&=: \ b(v_{el}) + d^+(v_{pos}) \\
\Psi^+(v) &= \ a^+(v_{el}) + a(v_{pos}) \\
&=: \ b^+(v_{el}) + d(v_{pos})
\end{aligned}
$$

(Diracfeldoperatoren). Dabei wurden die *neuen Bezeichnungen* b, b^+, d, d^+ eingeführt, um Teilchen- und Antiteilchenoperatoren besser zu unterscheiden und um Anschluss an übliche Bezeichnungsweisen zu erhalten. b, b^+ vernichten und erzeugen also ab jetzt ausschliesslich Teilchen (d.h. ihre Argumente sind $\in \mathcal{H}_{el}$), und analog für d, d^+ (Dabei sind diese Bezeichnungen nicht mit den früher verwendeten b, b^+ zu verwechseln).

Es gilt

$$\{\Psi(v), \Psi^+(w)\} = \langle v, w \rangle$$

Entwickelt man nach einer ONBasis $e_k^{el} \in \mathcal{H}_{el}$ bzw. $e_k^{pos} \in \mathcal{H}_{pos}$, so ist

$$
\begin{aligned}
\Psi(v) &= \sum_k (\left\langle e_k^{el}, v_{el} \right\rangle^* b_k + \langle e_k^{pos}, v_{pos} \rangle \, d_k^+) \\
\Psi^+(v) &= \sum_k (\left\langle e_k^{el}, v_{el} \right\rangle b_k^+ + \langle e_k^{pos}, v_{pos} \rangle^* \, d_k)
\end{aligned}
$$

Man beachte dabei die AntilinearitÄt von b, d. Analog kann man formal nach einer kontinuierlichen 'Basis' entwickeln und damit den Dirac-Feldoperator am Ort $\vec{x}$ definieren durch

$$
\begin{aligned}
\Psi(v) &=: \int d^3x \, v_t(\vec{x})^+ \Psi_t(\vec{x}) \\
\Psi^+(v) &=: \int d^3x \, \Psi_t^+(\vec{x}) v_t(\vec{x}) \\
\Psi(x) &= \sum_k (e_k^{el}(x) b_k + e_k^{pos}(x) d_k^+) \\
\Psi^+(x) &= \sum_k (e_k^{el}(x)^+ b_k^+ + e_k^{pos}(x)^+ d_k)
\end{aligned}
$$

Dabei ist $v_t(\vec{x}) =: v(x)$ der freie Diracspinor und $v(x)^+$ der entsprechende transponierte komplex konjugierte Diracspinor. Die Schreibweise $\Psi_t(\vec{x}) =: \Psi(x)$ ist Ähnlich wie die der Delta-'Funktion' $\delta(x)$ nur in einem Integralkern sinnvoll. Die obige Definition ist für alle (festen) Zeiten t sinnvoll, wie wir jetzt zeigen:

Sei obige Definition gültig für $t = 0$. Die Diracgleichung für den 1-Teilchenzustand v lÄsst sich schreiben als

$$i\frac{dv_t(\vec{x})}{dt} = H\,v_t(\vec{x}) \implies v_t(\vec{x}) = (e^{-iHt}v_0)(\vec{x})$$

Wie oben im ersten Beispiel gezeigt wurde, ist dann

$$\Psi_t^+(v) := \Psi^+(e^{iHt}v) = e^{i\hat{H}t}\Psi^+(v)e^{-i\hat{H}t}$$

wobei $\hat{H}$ der Lift von H ist. Man könnte hier auch genauer $\Psi(v) = \Psi_0(v_0)$ schreiben; die Notation soll hier aber nicht zu stark verkompliziert werden, wobei wir gewisse Unsauberkeiten in Kauf nehmen müssen. Definiert man nun

$$\Psi_t^+(v) =: \int d^3x\,\Psi_t^+(\vec{x})v_0(\vec{x})$$

d.h. insbesondere

$$\Psi_t^+(\vec{x}) := e^{i\hat{H}t}\Psi_0^+(\vec{x})e^{-i\hat{H}t}$$

so folgt

$$\begin{aligned}
\int d^3x\,\Psi_0^+(\vec{x})v_0(\vec{x}) &= \Psi^+(v) \\
&= \Psi^+(e^{iHt}e^{-iHt}v) \\
&= \Psi_t^+(e^{-iHt}v) \\
&= \int d^3x\,\Psi_t^+(\vec{x})(e^{-iHt}v_0)(\vec{x}) \\
&= \int d^3x\,\Psi_t^+(\vec{x})v_t(\vec{x})
\end{aligned}$$

Man kann daher auch mit $x = (t, \vec{x})$ abgekürzt schreiben

$$\begin{aligned}
\Psi(v) &=: \int d^3x\,v(x)^+\Psi(x) \\
\Psi^+(v) &=: \int d^3x\,\Psi^+(x)v(x)
\end{aligned}$$

Sei $T_{g,a}$ die unitÄre Darstellung der doppelten Überlagerungsgruppe der Poincaregruppe auf $\mathcal{H}_{tot}$

$$(T_{g,a}v)(x) = \hat{g}\,v(\Lambda^{-1}(x-a))$$

(vgl. das Kapitel *Spinoren und die Diracgleichung*) und sei $\hat{U}_{g,a}$ der zugehörige Lift. Dann ist

$$\Psi^+(T_{g,a}v) = \hat{U}_{g,a}\,\Psi^+(v)\,\hat{U}_{g,a}^{-1}$$

und man kann mit der Definition von $\Psi(x)$ zeigen, dass

$$\hat{U}_{g,a}\,\Psi^+(x)\,\hat{U}_{g,a}^{-1} = \hat{g}^{-1}\,\Psi(\Lambda x + a)$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} & i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(v) &:=& \quad \Psi(i\gamma^\mu \partial_\mu v) = \\ & &=& \quad \Psi(mv) = m\Psi(v) \\ \Longleftrightarrow \quad & i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) &=& \quad m\Psi(x) \end{aligned}$$

d.h. auch für den freien Feldoperator gilt die Diracgleichung, wobei sie aber im obigen Distributionensinn zu verstehen ist.

Man kann nun auch im Impulsraum Operatoren $b(\vec{p}), d(\vec{p})$ definieren usw.. Weitere Einzelheiten sollen hier nicht besprochen werden; Man findet sie z.B. im Buch von **G.Scharf: Finite Quantum Elektrodynamics**.

3 Intrinsische Symmetrien

Ausgearbeitet von Jörg Resag

3.1 Beschreibung intrinsischer Symmetrien

Zur Beschreibung einer intrinsischen Symmetrie ordnen wir einem Teilchen (z.B. einem Quark) einen (oder mehrere) intrinsischen Zustandsvektor $x \in C^n$ zu. Auf C^n operiere eine unitäre Darstellung $D_1(U)$, $U \in SU(n)$ der Symmetriegruppe $SU(n)$, z.B. einfach $D_1(U) = U$. Beispiele sind die Colorsymmetrie oder die Flavorsymmetrie. Unser Ziel ist es nun, den entsprechenden Darstellungsraum für das Antiteilchen (Antiquark) zu finden.

Sei dazu $\Lambda_m C^n$ der Raum der antisymmetrischen Tensoren aus dem m-fachen Tensorprodukt $\otimes_m C^n$. Genauer bedeutet dies:
Seien $x_1 \ldots x_m \in C^n$. Dann ist ein Vektor $v \in \Lambda_m C^n$ definiert durch

$$\begin{aligned} v &= x_1 \wedge \ldots \wedge x_m = \\ &:= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sign}(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(m)} \end{aligned}$$

wobei S_m die Menge der Permutationen von m Elementen ist, $\mathrm{sign}(\sigma)$ ist das Signum der Permutation und $\otimes$ kennzeichnet das Tensorprodukt von Vektoren. Beachte, dass wegen der Antisymmetrisierung $m \leq n$ sein muss.

Sei weiter $D_2(U)$ eine unitäre Darstellung von $SU(n)$ auf dem Raum der antisymmetrischen Tensoren $\Lambda_{n-1}C^n$, d.h. $m = n - 1$ jetzt. Wir zeigen nun, dass diese Darstellung auf kanonische Weise mit $D_1(U)$ zusammenhängt. Den Zusammenhang stellen wir her, indem wir das induzierte Skalarprodukt in $\Lambda_{n-1}C^n$

$$\langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1},\ w_1 \wedge \ldots \wedge w_{n-1} \rangle = \det(\langle v_i, w_j, \rangle)$$

und die Volumenform

$$\omega(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1},\, v_n) = \det(\,(v_i)_j\,)$$

verwenden. Dabei ist

$$v_i = (v_i)_j\, e_j$$

in der Orthonormalbasis e_i entwickelt worden und es gilt

$$\omega(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \mathrm{sign}(\sigma)$$

Wir zeigen nun:
Es gibt einen kanonischen antiunitären Isomorphismus

$$\begin{aligned} I: \Lambda_{n-1}C^n &\to C^n \quad \text{mit} \\ I\,D_2(U) &= D_1(U)\,I \end{aligned}$$

Dieser Isomorphismus I identifiziert die Räume $\Lambda_{n-1}C^n$ und C^n miteinander:

$$\Lambda_{n-1}C^n \cong C^n$$

Dies muss ja möglich sein, da beide Vektorräume die gleiche Dimension haben, wie wir weiter unten noch sehen werden. Die obige Gleichung stellt dann den Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen dar. Die beiden Darstellungen $D_1(U)$ und $D_2(U)$ sind sogenannte *fundamentale* Darstellungen von $SU(n)$, von denen es allgemein $n-1$ Stück gibt.

Zum Beweis konstruieren wir I explizit durch

$$\langle I\,y, x\rangle := \omega(y,x) \;\; \forall\, y \in \Lambda_{n-1}C^n,\; x \in C^n$$

Nach dem Satz von Riesz ist I dadurch eindeutig bestimmt (vgl. Greub: Lineare Algebra S.185 Satz 7.7).

Es gilt

$$\begin{aligned} \omega(y,x) &= \omega(D_2(U)\,y,\; D_1(U)\,x) = \\ &= \langle I\,D_2(U)\,y,\; D_1(U)\,x\rangle = \\ &= \left\langle D_1^{+}(U)\,I\,D_2(U)\,y,\; x\right\rangle \end{aligned}$$

Gleichzeitig gilt auch

$$\omega(y,x) = \langle I\,y,\; x\rangle$$

Nach dem Satz von Riesz ist wegen der Eindeutigkeit damit

$$\begin{aligned} D_1^{+}(U)\,I\,D_2(U) &= I \\ \Longrightarrow \quad I\,D_2(U) &= D_1(U)\,I \end{aligned}$$

Aus der Definition von I ist klar, dass I antilinear sein muss:

$$I\,\lambda x = \lambda^*\, I\, x\ , \quad \lambda \in C$$

Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis von C^n und $\sigma \in S_n$. Dann ist durch $e_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e_{\sigma(n-1)}$ ein Erzeugendensystem in $\Lambda_{n-1}C^n$ gegeben. Nimmt man die wegen der Antisymmetrie mehrfach vorkommenden Vektoren heraus, so erhält man einen vollständigen Satz von n orthonormierten Basisvektoren. Wegen der Antilinearität genügt es, I auf dieser Basis auszuwerten. Aus der Definition von I folgt dann die Bedingung

$$\Big\langle I\, e_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e_{\sigma(n-1)},\, e_{\sigma(n)} \Big\rangle = \omega(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \mathrm{sign}(\sigma)$$

Definieren wir in $\Lambda_n C^n$ eine Basis $\hat{e}_i$ durch

$$e_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e_{\sigma(n-1)} =: \hat{e}_{\sigma(n)}\, \mathrm{sign}(\sigma)$$

so folgt einfach

$$\begin{aligned} I\,\hat{e}_i &= e_i \\ \Longrightarrow \quad I\, v^i\, \hat{e}_i &= (v^i)^*\, e_i \end{aligned}$$

Bezüglich der Basen e_i in C^n und $\hat{e}_i$ in $\Lambda_{n-1}C^n$ wird also I dargestellt durch die Matrix

$$I = 1_n\, ()^*.$$

Dabei bedeutet $()^*$, dass der folgende Spaltenvektor komplex zu konjugieren ist. In dieser Darstellung ist die Antiunitarität

$$\langle I\, x,\, I\, y\rangle = \langle y, x\rangle$$

direkt sichtbar.

Für die Darstellungsmatrizen von $SU(n)$ folgt in dieser Basis

$$\begin{aligned} I\, D_2(U) &= ()^*\, D_2(U) = D_2^*(U)\, ()^* = \\ &= D_1(U)\, I = D_1(U)\, ()^* \\ \Longrightarrow \quad D_2(U) &= D_1^*(U) \end{aligned}$$

Die Darstellung der Symmetriegruppe $SU(n)$ für mehrere (Anti-) Teilchen ist gegeben durch das Tensorprodukt der Darstellungen in den Einteilchenräumen.

Wir fordern für einen Teilchen-Antiteilchenzustand, dass der entsprechende Darstellungsraum einen eindimensionalen linearen invarianten Unterraum enthält, auf dem $SU(n)$ durch die Identität dargestellt wird. Teilchen und Antiteilchen sollen sich also zu einem Singulett koppeln lassen. Diese Forderung wird z.B. für die Flavor- und Colorsymmetrien durch das Experiment erzwungen. Die Bildung eines Singuletts ist aber nur dann möglich, wenn dem Antiteilchen der intrinsische Zustandsraum $\Lambda_{n-1}C^n$ mit der Darstellung $D_2(U)$ zugeordnet wird. Der Singulettvektor $s \in C^n \otimes \Lambda_{n-1}C^n$ lautet

$$s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \hat{e}_i$$

denn dann ist

$$\begin{aligned}
D(U)\,s &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i,j,k=1}^{n} e_j U_{ji} \otimes \hat{e}_k U^*_{ki} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i,j,k=1}^{n} U_{ji} U^+_{ik}\, e_j \otimes \hat{e}_k = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j}^{n} e_j \otimes \hat{e}_j = \\
&= s
\end{aligned}$$

Anmerkung:
Die hier betrachteten Beziehungen kann man auch sehr schön in den sogenannten *Young tableaux* wiederfinden, die eine Relation zwischen Darstellungen der Permutationsgruppe und $SU(n)$ herstellen.

3.2 SU(2)-Symmetrie

Sei also $n = 2$ und $D_1(U) = U$. Es gilt

$$\omega(e_i, e_j) = \mathrm{sign}(\sigma\tbinom{12}{ij}\,) = -\epsilon_{ij}$$

wobei ϵ_{ij} die Matrixelemente der ϵ-Matrix aus Kapitel 1.2 sind. Also ist

$$\begin{aligned}
\hat{e}_1 &= -e_2 \\
\hat{e}_2 &= e_1
\end{aligned}$$

und bezüglich dieser Basis ist

$$I = 1_2 \, ()^* \; \text{ und } \; D_2(U) = U^*$$

Bezüglich der Basis e_i in $\Lambda_1 C^2$ dagegen ist

$$I = \epsilon \, ()^*$$

und es ist

$$\begin{aligned} I \, D_2(U) &= \epsilon \, ()^* \, D_2(U) = \epsilon \, D_2^*(U) \, ()^* = \\ &= U \, I = U \, \epsilon \, ()^* \\ \Longrightarrow \quad D_2(U) = \epsilon^{-1} U^* \epsilon = \tilde{U}^{-1} = U & \end{aligned}$$

Die Darstellungen $D_1(U)$ und $D_2(U)$ von $SU(2)$ sind also unitär äquivalent. Dies muss auch so sein, da es nur $n - 1 = 1$ fundamentale Darstellung von $SU(2)$ geben kann.

3.3 SU(3)-Symmetrie

Sei $n = 3$ und $D_1(U) = U$. Es gilt

$$\omega(e_i, e_j, e_k) = \mathrm{sign}(\sigma\tbinom{123}{ijk}\,) = \epsilon_{ijk}$$

wobei ϵ_{ijk} der übliche Levi-Civita-Tensor ist. Es ist damit

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= e_2 \wedge e_3 \\ \hat{e}_2 &= e_3 \wedge e_1 \\ \hat{e}_3 &= e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

und bezüglich dieser Basis ist wieder

$$I = 1_3 \, ()^* \; \text{ und } \; D_2(U) = U^*$$

Die Darstellungen $D_1(U)$ und $D_2(U)$ von $SU(3)$ sind *nicht* unitär äquivalent und bilden die zwei fundamentalen Darstellungen von $SU(3)$.

3.4 Color-Symmetrie

Die Symmetriegruppe der Color ist $SU(3)$. Um die üblichen Bezeichnungen zu erhalten, setzen wir

$$e_1 = r,\ e_2 = g,\ e_3 = b$$

wobei die Abkürzungen für die Bezeichnungen *rot, grün, blau* stehen. Um in den einzelnen Summanden des Singuletts jeweils Produkte aus Farbe und Antifarbe zu erhalten, setzen wir

$$\hat{e}_1 = \bar{r},\ \hat{e}_2 = \bar{g},\ \hat{e}_3 = \bar{b}$$

wobei die Abkürzungen für die Bezeichnungen *antirot, antigrün, antiblau* stehen. Der Singulettzustand lautet damit

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}\right)$$

Diese ganze Namensgebung ist jedoch reine Konventionssache ohne tieferen physikalischen Hintergrund.

3.5 Flavor-Symmetrie

Die Symmetriegruppe der Flavor ist $SU(2)$ oder $SU(3)$, je nach Modell (auch andere n sind denkbar). Um wieder die üblichen Bezeichnungen zu erhalten, setzen wir für $SU(3)$

$$e_1 = u,\ e_2 = d,\ e_3 = s$$

wobei die Abkürzungen für die Flavor *up, down, strange* stehen. Die Flavor sind mit additiven messbaren Quantenzahlen verknüpft, z.B. der Ladung. Beim Wechsel von Teilchen zu Antiteilchen (gleichbedeutend mit dem Wechsel von Flavor zu Antiflavor) wechseln diese Quantenzahlen ihr Vorzeichen. Der Singulettzustand ist nun experimentell mit Teilchen verknüpft, bei denen diese Quantenzahlen den Wert Null haben. Somit müssen sich diese Quantenzahlen in jedem Term des Singuletts zu Null addieren. Daher ergibt sich die Zuordnung

$$\hat{e}_1 = \bar{u},\ \hat{e}_2 = \bar{d},\ \hat{e}_3 = \bar{s}$$

und der $SU(3)$-Flavor-Singulettzustand lautet

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\right)$$

Er entspricht dem η'-Meson in einfachen Modellen. Für $SU(2)$ gelten die analogen Formeln.

4 Bethe-Salpeter-Gleichung: Das Wick-Cutkosky-Modell

Ausgearbeitet von Jörg Resag

4.1 Formulierung des Modells

Die Bethe-Salpeter-Gleichung beschreibt relativistisch gebundene Zustände (vgl. **Itzykson-Zuber: Quantum Field Theory, Kap 10-2**; unsere Notationen hier entsprechen denen aus diesem Buch). Sie lautet im Impulsraum für zwei skalare gebundene Teilchen

$$[(\eta_1 P + p)^2 + m_1^2]\,[(\eta_2 P - p)^2 + m_2^2]\,\chi_P(p) = -\int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\,V(p,p',P)\,\chi_P(p')$$

mit dem Schwerpunktsimpuls $P = p_1 + p_2$, dem Relativimpuls p, den beiden Teilchenmassen m_1, m_2, dem Wechselwirkungskern V und der Bethe-Salpeter-Amplitude χ_P. Es gilt $\eta_1 + \eta_2 = 1$, wobei aber ansonsten die η_i willkürlich sind, da sich die beiden gebundenen Teilchen nicht auf der Massenschale befinden müssen. Im Folgenden beschränken wir uns auf $m_1 = m_2 =: m$ und setzen $\eta_1 = \eta_2 = 1/2$.

Das Wick-Cutkosky-Modell (**Phys.Rev. 96 (1954) S.1124**) betrachtet nun den Fall von zwei skalaren Teilchen gleicher Masse m, die über ein anderes skalares Feld der Masse $\tilde{\mu}$ wechselwirken. Weiter wird die Leiternäherung verwendet, d.h. im Wechselwirkungskern V wird nur der Graph niedrigster Ordnung berücksichtigt, also der einfache Teilchenaustausch. Damit ist

$$V(p,p',P) = -\frac{ig_1g_2}{(p-p')^2 - \tilde{\mu}^2 + i\epsilon}$$

V ist also jetzt unabhängig von P und wir schreiben daher einfach $\chi_P(p) =: \chi(p)$. Als weitere Vereinfachung sei die Masse des Austauschteilchens $\tilde{\mu} = 0$ und wir gehen ins Ruhesystem $P = (M, \vec{0}) = Me_0$ mit $0 \leq M \leq 2m$. Die BS-Gleichung lautet damit

$$\left[\left(\frac{M}{2}e_0 + p\right)^2 + m^2\right]\left[\left(\frac{M}{2}e_0 - p\right)^2 + m^2\right]\chi(p) = i\int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\,\frac{g_1g_2}{(p-p')^2 + i\epsilon}\,\chi(p')$$

4.2 Die Wick-Rotation

Wie Wick und Cutkosky gezeigt haben, ist $\chi(p)$ analytisch in p^0. Wir betrachten die Gleichung daher als Gleichung von Funktionen, die in $p^0 =: z \in C$ analytisch fortgesetzt sind. Statt für reelle Werte von z lösen wir die Gleichung nun für rein imaginäre Werte von z, d.h. wir schreiben $z =: ip_4,\ p_4 \in R$, ersetzen also p^0 durch ip_4. Weiter ersetzen wir mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes die Integrationsvariable p'^0 durch ip'_4, integrieren also über die imaginäre Achse. Dazu überzeugt man sich, dass der Integrand keine Pole im ersten und dritten Quadranten liefert. Die BS-Gleichung im Minkowskiraum (d.h. in der Variablen $z = p^0$) geht also durch die folgenden Ersetzungen in die 'euklidische' BS-Gleichung (d.h. in der Variablen $z = ip_4$) über (wobei dann im euklidischen Raum nicht mehr zwischen oberer und unterer Indexstellung unterschieden wird):

$$\begin{aligned} p^0 &\longrightarrow ip_4 \\ p^2 := (p^0)^2 - \vec{p}^2 &\longrightarrow -p^2 := -\sum_{k=1}^{4}(p_k)^2 \\ d^4p := dp^0\, d^3p &\longrightarrow id^4p := id^3p\, dp_4 \\ \chi(p) := \chi(p^0, \vec{p}) &\longrightarrow \chi(p) := \chi(ip_4, \vec{p}) \end{aligned}$$

Dieses Verfahren wird *Wick-Rotation* genannt. Sein Sinn besteht darin, die Minkowski-Metrik in die einfachere euklidische Metrik umzuwandeln. Wir setzen

$$\lambda := \frac{g_1 g_2}{2^4 \pi}$$

und erhalten mit $P = Me_0 = Me_4$ sowie mit

$$\left[\left(-i\frac{M}{2}e_4 + p\right)^2 + m^2\right]\left[\left(+i\frac{M}{2}e_4 + p\right)^2 + m^2\right] = \left(p^2 - \left(\frac{M}{2}\right)^2 + m^2\right)^2 + (Mp_4)^2$$

die Wick-rotierte (euklidische) BS-Gleichung

$$\left[\left(p^2 - \left(\frac{M}{2}\right)^2 + m^2\right)^2 + (Mp_4)^2\right]\chi(p) = \frac{\lambda}{\pi^3}\int d^4p'\, \frac{1}{(p-p')^2 + i\epsilon}\,\chi(p')$$

Sei

$$\tilde{m} := \sqrt{m^2 - \left(\frac{M}{2}\right)^2}$$

Wir führen nun dimensionslose Grössen ein mit

$$\begin{aligned} q &:= \frac{p}{\tilde{m}} \\ \mu &:= \frac{M}{\tilde{m}} \\ \lambda' &:= \frac{\lambda}{\pi^3 \tilde{m}^2} \\ \phi(q) &:= \chi(p) \end{aligned}$$

(dabei ist μ nicht zu verwechseln mit der Masse $\tilde{\mu}$ des ausgetauschten Teilchens, die ja 0 gesetzt wurde) und erhalten

$$\left[(q^2+1)^2 + (\mu q_4)^2\right] \phi(q) = \lambda' \int d^4q' \, \frac{1}{(q-q')^2 + i\epsilon} \, \phi(q')$$

4.3 Umformung in eine Differentialgleichung

Der Integrand auf der rechten Seite der obigen Gleichung ist gerade die Greensche Funktion des Laplace-Operators im $n = 4$-dimensionalen euklidischen Raum

$$\begin{aligned} \Box &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dq_k}\right)^2 \\ &= \left(\frac{d}{d|q|}\right)^2 - \frac{n-1}{|q|}\frac{d}{d|q|} + \text{Winkelterme} \end{aligned}$$

Es gilt nämlich für $n = 4$

$$\Box \, \frac{1}{q^2} = 0$$

und daher

$$\begin{aligned} \int_{R^4} d^4q \left(\Box \frac{1}{q^2}\right) g(q) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|q|<\epsilon} d^4q \left(\nabla\nabla \frac{1}{q^2}\right) g(q) = \\ &= g(0) \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S^3(\epsilon)} \sum_{i=1}^{4} dA_i \frac{d}{dq_i} \frac{1}{q^2} = \\ &= \ldots \end{aligned}$$

wobei $S^3(\epsilon)$ die 3-dimensionale Oberfläche einer Kugel um 0 mit Radius ϵ in 4 Dimensionen ist. Die Flächenelemente darauf sind gegeben durch

$$dA_i = d^3\Omega \frac{q_i}{|q|} \epsilon^3$$

mit

$$\int_{S^3} d^3\Omega = 2\pi^2 = \text{Fläche von } \ S^3$$

Also ist

$$\ldots = g(0)\,(-2)\,2\pi^2$$

und somit

$$\Box \frac{1}{q^2} = -2 \cdot 2\pi^2\,\delta^4(0)$$

Durch Anwenden von $\Box$ auf die euklidische BS-Gleichung erhalten wir daher

$$\Box\,[(q^2+1)^2 + (\mu q_4)^2]\,\phi(q) = -4\pi^2\lambda'\,\phi(q)$$

4.4 Stereographische Projektion

Die obige Gleichung besitzt eine versteckte Symmetrie, die man dadurch sichtbar machen kann, dass man sie umschreibt in eine Gleichung auf der 4-dimensionalen Einheitssphäre $S^4 \subset R^5$ und q als stereographische Koordinaten auf S^4 interpretiert. Sei dazu

$$\Omega := \left(\frac{2q}{1+q^2}\,, \frac{1-q^2}{1+q^2} \right)$$

Dieser 5-komponentige Vektor hat den Betrag 1 und liefert eine Koordinatendarstellung von $S^4 - \{SP\}$, wobei $SP = (0,0,0,0,-1)$ der Südpol ist. Man kann sich den Zusammenhang im folgenden Bild veranschaulichen:

Der Laplace-Operator auf einer differentierbaren k-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^k mit (lokalen) Koordinaten ('Karte')

$$\begin{aligned} \hat{\xi} : U \subset M^k &\longrightarrow U' \subset R^k \\ \hat{\xi}(p) =: \xi &= (\xi_1, \ldots, \xi_k) \end{aligned}$$

ist (lokal) definiert durch

$$\Box_{M^k} := \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{k} \frac{d}{d\xi_i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{d}{d\xi_j} \right)$$

Dabei ist g_{ij} die metrische Matrix in diesen Koordinaten, $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ und $\sqrt{g} := \sqrt{\det g}$. Falls M^k in R^n mit $n \geq k$ eingebettet ist, und falls $x(\xi) \in M^k \subset R^n$ ein n-dimensionaler Ortsvektor mit Endpunkt auf M^k ist, so ist

$$g_{ij} = \frac{dx}{d\xi_i} \cdot \frac{dx}{d\xi_j}$$

wobei rechts das gewöhnliche euklidische Skalarprodukt im R^n steht. Man kann sich überzeugen, dass sich dieser Operator sinnvoll unter Koordinaten-wechseln transformiert. So liefert die Formel für $M^k = R^k$ den gewöhnlichen Laplaceoperator in allgemeinen (evtl. krummlinigen) Koordinaten.

Für $M^k = S^4$ setzen wir $\xi = q$ und $x = \Omega$. In diesen Koordinaten erhalten wir für die Metrik auf S^4

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{d\Omega}{dq_i} \cdot \frac{d\Omega}{dq_j} = \frac{4}{(1+q^2)^2}\,\delta_{ij} \\ g^{ij} &= \frac{(1+q^2)^2}{4}\,\delta_{ij} \\ \sqrt{g} &= \left(\frac{2}{1+q^2}\right)^4 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\Box_{S^4} = \sum_{i=1}^{4} \left(-(1+q^2)\, q_i \frac{d}{dq_i} + \frac{1}{4}(1+q^2)^2 \frac{d^2}{dq_i^2} \right)$$

und somit ist

$$\begin{aligned} (1+q^2)^3\,\Box\,(1+q^2)^{-1} &= \sum_{i=1}^{4} (1+q^2)^3 \frac{d^2}{dq_i^2} (1+q^2)^{-1} = \\ &= -8 + 4 \sum_{i=1}^{4} \left(-(1+q^2)\, q_i \frac{d}{dq_i} + \frac{1}{4}(1+q^2)^2 \frac{d^2}{dq_i^2} \right) = \\ &= 4(\Box_{S^4} - 2) \end{aligned}$$

mit $\Box = \Box_{R^4}$ wie vorher auch. Weiter setzen wir

$$\psi(\Omega) := (1+q^2)^3\, \phi(q)$$

und können damit die BS-Gleichung umschreiben zu

$$(\Box_{S^4} - 2)\left[1 + \frac{1}{4}(\mu\Omega_4)^2\right] \psi(\Omega) = -\pi^2 \lambda'\, \psi(\Omega)$$

mit $\Omega_4 = (2q_4)/(1+q^2)$ wie oben bereits definiert. Nun erkennt man die $SO(4)$-Symmetrie dieser Gleichung: Wenn $\psi(\Omega)$ eine Lösung dieser Gleichung ist, so ist auch $\psi(R\Omega)$ eine Lösung. Dabei ist $R \in SO(4)$ eine Drehung um die 4-Achse, so dass Ω_4 invariant bleibt.

4.5 Ausnutzen der SO(4)-Symmetrie

Um die $SO(4)$-Symmetrie auszunutzen, schreiben wir Ω als

$$\Omega = (\Omega_{i\neq 4}\,,\, \Omega_4) = (\xi\, \sin x,\, \cos x)$$

Dabei beachte man, dass Ω_4 als fünfte Komponente von Ω geschrieben wurde. Wegen $\Omega^2 = 1$ gilt

$$\xi^2 = 1 \;\Rightarrow\; \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in S^3$$

Seien $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ irgendwelche Koordinaten auf S^3 (z.B. Eulerwinkel wegen $S^3 \simeq SU(2)$), d.h. $\xi = \xi(\alpha)$. Für die metrische Matrix in den Koordinaten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, x)$ auf S^4 haben wir dann

$$\begin{aligned} \xi^2 = 1 \quad \Rightarrow & \quad \frac{d}{d\alpha_i}\xi^2 = 2\xi\frac{d\xi}{d\alpha_i} = 0 \\ \Rightarrow \quad g_{\alpha_i x} \quad = & \quad \frac{d\Omega}{d\alpha_i}\cdot\frac{d\Omega}{dx} = \sin x \cos x\; \xi\frac{d\xi}{d\alpha_i} = 0 \end{aligned}$$

und somit in Blockschreibweise

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha_i\alpha_j} & 0 \\ 0 & g_{xx} \end{pmatrix}$$

mit $g_{xx} = 1$. Für die metrische Matrix auf S^3 in den Koordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ haben wir

$$\begin{aligned} g_{ij}^{S^3} &= \frac{d\xi}{d\alpha_i}\cdot\frac{d\xi}{d\alpha_j} \\ \Rightarrow \quad g_{\alpha_i\alpha_j} &= \sin^2 x\; g_{ij}^{S^3} \\ \sqrt{g} &= \sin^3 x\; \sqrt{g^{S^3}} \end{aligned}$$

Für $\Box_{S^3}$ setzen wir $x = \xi$ für den Ortsvektor und $\xi_i = \alpha_i$ für die Koordinaten auf S^3 in die Definition ein. Aus der Definition von $\Box_{S^4}$ und $\Box_{S^3}$ folgt dann

$$\Box_{S^4} = \frac{1}{\sin^2 x}\,\Box_{S^3} + \frac{1}{\sin^3 x}\,\frac{d}{dx}\,\sin^3 x\,\frac{d}{dx}$$

Damit lautet die BS-Gleichung nun

$$\left[\frac{1}{\sin^2 x}\,\Box_{S^3} + \frac{1}{\sin^3 x}\,\frac{d}{dx}\,\sin^3 x\,\frac{d}{dx} - 2\right]\,\left[1 + \frac{1}{4}(\mu\Omega_4)^2\right]\,\psi(\Omega) = -\pi^2\lambda'\,\psi(\Omega)$$

Weiter setzen wir

$$z = \cos x = \Omega_4 \;\in [-1,1]$$

und wir erhalten mit

$$\begin{aligned}\Phi(z,\xi) &:= \left[1 + \frac{1}{4}(\mu z)^2\right]\,\psi(\Omega)\\ h(z) &:= \frac{\pi^2\lambda'}{1+\frac{1}{4}(\mu z)^2}\end{aligned}$$

die Gleichung

$$\left(\frac{1}{1-z^2}\Box_{S^3} + (1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - 4z\frac{d}{dz} - 2 + h(z)\right)\,\Phi(z,\xi) = 0$$

Diese Gleichung hat eine ähnliche Struktur wie z.B. die Schrödingergleichung in Kugelkoordinaten mit einem rotationssymmetrischen Potential. Dort sucht man ein vollständiges System von Funktionen auf S^2 (Kugelflächenfunktionen) und gelangt mit dem Ansatz $\psi(\vec{x}) = R_{nl}(r)\,Y_{lm}(\hat{r})$ zu einer Gleichung für $R_{nl}(r)$ in nur einer Variablen (Radialgleichung). Analog suchen wir nun hier ein vollständiges System von Funktionen auf S^3. Dabei verwenden wir die Isomorphie $S^3 \simeq SU(2)$. Dann sind irreduzible Darstellungen von $SU(2)$ gegeben durch lineare Operatoren $D(\xi)$ auf $(2j+1)$-dimensionalen komplexen Vektorräumen V

$$\begin{aligned}D(\xi):\; V &\to V\\ \langle\, jm \mid D(\xi) \mid jm' \,\rangle &=: \quad D^j_{mm'}(\xi)\end{aligned}$$

Dabei sind $D^j_{mm'}(\xi)$ die aus der Quantenmechanik bekannten Wignerschen D-Funktionen. Es gilt nun der *Satz von Peter und Weyl*:

Durchläuft D alle irreduziblen endlichdimensionalen Darstellungen einer kompakten Gruppe G, so bilden die entsprechenden D-Funktionen ein vollständiges System von Funktionen auf G, d.h. jede Funktion $\phi:\; G \to C$ kann nach ihnen entwickelt werden.

Damit bilden die Wignerschen D-Funktionen $D^j_{mm'}(\xi)$ ein vollständiges System auf $S^3 \simeq SU(2)$. Wir machen daher den speziellen Ansatz

$$\Phi(z,\xi) =: f(z)\, D^j_{mm'}(\xi)$$

Es gilt nun

$$\Box_{S^3}\, D^j_{mm'}(\xi) = -4j(j+1)\, D^j_{mm'}(\xi)$$

Setzen wir noch $2j+1 = n \in \{1,2,3,\ldots\} \;\Rightarrow\; 4j(j+1) = n^2-1$, so erhalten wir in Analogie zur Radialgleichung

$$(1-z^2)\, f''(z) - 4z\, f'(z) - \frac{n^2-1}{1-z^2}\, f(z) - 2f(z) + h(z)\, f(z) = 0 \qquad (1)$$

mit $f'(z) = (df(z)) \,/\, (dz)$. Es ist uns also gelungen, die euklidische BS-Gleichung durch Ausnutzen der Symmetrie auf eine einfache Differentialgleichung in einer Variablen umzuschreiben.

In *Itzykson-Zuber, QFT, S.491 Formel (10-70)* wird die folgende Formel angegeben:

$$(1-z^2)\, g''(z) - 2(n-1)z\, g'(z) - n(n-1)\, g(z) + h(z)\, g(z) = 0 \qquad (2)$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu unserer Gleichung (1). Dazu multipliziert man Gleichung (2) mit $(1-z^2)^a$ und setzt in Gleichung (1) $f(z) = (1-z^2)^a\, g(z)$. Wie man beim Vergleich erkennt, muss man $a = -(n+1)/2$ setzen.

4.6 Numerische Lösung

Wir versuchen nun, Gleichung (1) zu lösen. Es war $-1 \leq z \leq 1$ gewesen. Zunächst soll die Asymptotik an den Rändern des Definitionsbereichs untersucht werden. Sei dazu

$$\begin{aligned}
z &=: \pm(1-y), \;\; y>0, \;\; y \ll 1 \\
G_\pm(y) &:= f(\pm(1-y)) \\
\tilde{\lambda} &:= \frac{\lambda}{\pi m^2} \\
\eta &= \frac{M}{2m} \\
\Rightarrow\;\; h(z) &= \tilde{\lambda}\, \frac{1}{1-\eta^2(1-z^2)} \approx \tilde{\lambda}
\end{aligned}$$

In niedrigster Ordnung in y lautet die asymptotische Differentialgleichung zu Gleichung (1) dann

$$2y\,G''_{\pm}(y) + 4\,G'_{\pm}(y) - \frac{n^2-1}{2y}\,G_{\pm}(y) - 2\,G_{\pm}(y) + \tilde{\lambda}\,G_{\pm}(y) = 0$$

Da diese Gleichung nicht unterscheidet zwischen $G_+(y)$ und $G_-(y)$, setzen wir $G_{\pm}(y) =: G(y)$. Die Gleichung lässt sich durch den Ansatz $G(y) = y^b$ lösen mit $b = (n-1)/2$ oder $b = -(n+1)/2$. Die zweite Lösung ist aber divergent in $y = 0$ und ergäbe eine unphysikalische Divergenz von $\phi(q)$ in $q_4 = 1$, ist also unbrauchbar. Damit bleibt als Lösung

$$G(y) = y^{(n-1)/2}\ , \ \text{dabei war}\ \ n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

und wir haben

$$\begin{aligned}
f(z) &\approx (1-z)^{(n-1)/2} \approx \left(\frac{1}{2}\,(1-z^2)\right)^{(n-1)/2}\ , \ \text{für}\ \ z \to 1 \\
f(z) &\approx (1+z)^{(n-1)/2} \approx \left(\frac{1}{2}\,(1-z^2)\right)^{(n-1)/2}\ , \ \text{für}\ \ z \to -1 \\
\Rightarrow\ f(z) &\approx \text{const} \cdot (1-z^2)^{(n-1)/2}\ , \ \text{für}\ \ |z| \to 1
\end{aligned}$$

Wir machen nun den Ansatz

$$\begin{aligned}
f(z) &=: \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,F(z) \\
\Rightarrow\ F(z) &\sim (1-z^2)^{n/2}\ , \ \text{für}\ \ |z| \to 1
\end{aligned}$$

Damit hat $F(z)$ das gleiche asymptotische Verhalten in $|z| \to 1$ wie die assoziierten Legendre-Polynome $P_k^n(z)$, was auch der Sinn dieser Transformation war. Die Differentialgleichung lautet nun

$$(1-z^2)\,F''(z) - 2z\,F'(z) + \left(-\frac{n^2}{1-z^2} + h(z)\right)\,F(z) = 0$$

Wegen des asymptotischen Verhaltens von $F(z)$ an den Rändern liegt es nahe, diese Gleichung in einer Basis aus assoziierten Legendre-Polynomen $P_k^n(z)$ zu lösen. Man kann dabei die Legendre-Differentialgleihung

$$(1-z^2)\,P_k^n(z)'' - 2z\,P_k^n(z)' + \left(k(k+1) - \frac{n^2}{1-z^2}\right)\,P_k^n(z) = 0$$

ausnutzen, indem man in die Differentialgleichung für $F(z)$ einen Term $(k(k+1) - k(k+1))\, F(z) = 0$ einfügt, so dass gilt

$$(1-z^2)\, F''(z) - 2z\, F'(z) + \left(k(k+1) - \frac{n^2}{1-z^2} \right) F(z) + [h(z) - k(k+1)]\; F(z) = 0$$

Es gilt nun der Satz (Bronstein S.448):

Das System der zu jedem $n \geq 0$ zugeordneten $P_k^n(z)$ mit $k = n,\, n+1, \ldots$ ist in $\mathcal{L}^2(-1,1)$ vollständig.

Wir entwickeln daher

$$F(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k\, P_k^n(z)$$

wobei die Reihe natürlich bei der tatsächlichen numerischen Rechnung bei einem $k = N$ abgebrochen werden muss. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} c_k \left(\frac{\tilde{\lambda}}{1-\eta^2(1-z^2)} - k(k+1) \right) P_k^n(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{\infty} c_k \left(\eta^2 (1-z^2)\, k(k+1) - k(k+1) + \tilde{\lambda} \right) P_k^n(z) &= 0 \end{aligned}$$

wobei wir $h(z)$ ausgeschrieben haben mit $\eta = M/(2m)$. Man kann nun mit $P_{k'}^n(z)$ multiplizieren und das Integral $\int_{-1}^{1} dz$ bilden. Als Ergebnis erhält man aus der unteren Gleichung ein verallgemeinertes Eigenwertproblem der Form

$$\eta^2\, A\, c + B(\tilde{\lambda})\, c = 0$$

in Matrixschreibweise, das sich mit Standardmethoden lösen lässt und mit dem man zu gegebenem $\tilde{\lambda} = \lambda/(\pi m^2)$ das $\eta = M/(2m)$ und somit M ausrechnen kann. Umgekehrt kann man auch mit der oberen der beiden Gleichungen zu gegebenem η das $\tilde{\lambda}$ berechnen. Die von uns gefundenen Ergebnisse stimmen mit denen von Wick und Cutkosky überein.

5 Symmetriebrechung in der QCD

Ausgearbeitet von Jörg Resag

5.1 Beschreibung von Symmetrien

Sei eine Lagrangedichte $\mathcal{L}$ gegeben, die von Fermionfeldern $\psi(x)$ abhängt und die invariant sei unter dem Wechsel

$$\psi(x) \longrightarrow B\psi(x)$$

wobei $\psi(x) = (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))$ und $(B\psi(x))_i = B_{ij}\psi_j(x)$ mit $B^+B = 1$. Der Index kann z.B. für die Flavor stehen.

Nach der 2-ten Quantisierung wird aus $\psi(x)$ der Feldoperator $\Psi(x)$. Man kann nun formal versuchen, B in den Fockraum zu liften mit

$$\begin{aligned} \Psi(Bv) &=: U_B \Psi(v) U_B^{-1} \\ \Longleftrightarrow \; B^+\Psi(x) &=: U_B \Psi(x) U_B^{-1} \end{aligned}$$

Falls $U_B |0\rangle = |0\rangle$ gilt, ist U_B der Lift von B. Andernfalls ist evtl. ein solches U_B auf dem Fockraum gar nicht streng definiert, da es verschiedene Fockräume ineinander überführen kann (vgl. später).

Sei B nun eine unitäre Darstellung einer r-dimensionalen kompakten Liegruppe G auf C^n, d.h.

$$B = \exp(\sum_{s=1}^{r} a_s T^s)$$

mit den antihermiteschen Generatoren T^s. Die Strukturkonstanten C^{abc} sind dabei gegeben durch

$$[T^a, T^b] = C^{abc} T^c$$

Sei nun

$$Q^s(t) := \int d^3x \, \Psi_i^+(x) T_{ij}^s \Psi_j(x)$$

wobei für den Antikommutator der Feldoperatoren gelte

$$\{\Psi_i(t, \vec{x}), \Psi_j^+(t, \vec{y})\} = \delta_{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Wir verwenden nun die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}
(A\{B,C\} - \{A,C\}B) &= ABC + ACB - ACB - CAB = \\
&= [AB, C] = -[C, AB] \\
\Longrightarrow [AB, CD] &= -AC\{D,B\} + A\{C,B\}D - C\{D,A\}B + \{C,A\}DB
\end{aligned}$$

und zeigen damit leicht, dass die $Q^s(t)$ dieselben Vertauschungsrelationen wie die Generatoren T^s erfüllen:

$$[Q^a(t), Q^b(t)] = C^{abc} Q^c(t)$$

Die $Q^s(t)$ bilden also für festes t eine Darstellung der Lie-Algebra von G.

Weiter kann man leicht nachrechnen

$$[\Psi_i(t,\vec{x}), Q^s(t)] = T^s_{ij} \Psi_j(t,\vec{x})$$

Für eine infinitesimale Transformation testen wir nun, ob

$$U_B = 1 + aQ^s(t) \text{ für } B = 1 + aT^s$$

gilt. Wir berechnen also (mit $x = (t, \vec{x})$)

$$\begin{aligned}
U_B \Psi_i(x) U_B^{-1} &= (1 + aQ^s(t))\Psi_i(x)(1 - aQ^s(t)) = \\
&= \Psi_i(x) - a[\Psi_i(x), Q^s(t)] + O(a^2) = \\
&= (1 - aT^s_{ij})\Psi_j(x) = \\
&= B^+_{ij}\Psi_j(x)
\end{aligned}$$

Da die $Q^s(t)$ eine Darstellung der Lie-Algebra bilden, bilden die

$$U_B(t) = \exp(\sum_{s=1}^{r} a_s Q^s(t))$$

also eine (Strahl-)Darstellung der Gruppe G. Ob diese U_B wohldefinierte Operatoren auf dem Fockraum sind, ist dabei noch unklar. Man kann nämlich leicht nachrechnen, dass z.B. für freie Diracfelder gilt:

$$\| Q^s(t) \left|0\right\rangle \|^2 = < 0|Q^{s+}(t) Q^s(t) \left|0\right\rangle = \infty$$

Andererseits bilden auch die normalgeordneten $:Q^s(t):$ eine Darstellung der Lie-Algebra. Wir haben also für freie Diracfelder

$$Q^s(t)\,|0\rangle \neq 0 \implies U_B\,|0\rangle = \exp(\sum_{s=1}^{r} a_s Q^s(t))\ |0\rangle \neq |0\rangle$$
$$:Q^s(t):|0\rangle = 0 \implies :U_B:|0\rangle =: \exp(\sum_{s=1}^{r} a_s Q^s(t)):\ |0\rangle = |0\rangle$$

Wenn $U_B\,|0\rangle \neq |0\rangle$ ist, spricht man davon, dass die durch die Gruppe G beschriebene Symmetrie von $\mathcal{L}$ im Fockraum *spontan gebrochen* ist, da sie zwar für $\mathcal{L}$ gilt, nicht aber auf den Zuständen des Hilbertraums realisiert ist. U_B ist dann kein wohldefinierter Operator auf dem Fockraum, da er Vakua aus verschiedenen disjunkten Fockräumen aufeinander abbildet, also in einem gewissen höheren Raum operiert.

5.2 Goldstone-Teilchen

Um einen hermiteschen Operator zu erhalten, definieren wir ab jetzt abweichend zu oben

$$\begin{aligned} Q^s(t) &:= \int d^3x\, \Psi_i^+(x)(-iT^s_{ij})\Psi_j(x) \\ \Longrightarrow U_B &= \exp(i\sum_{s=1}^{r} a_s Q^s(t)) \end{aligned}$$

Dann ist

$$Q^s(t) = \int d^3x\, J_0^s(x)$$

wobei $J^s_\mu(x)$ der erhaltene Nötherstrom zur Invarianztrafo $\psi \to B\psi$ von $\mathcal{L}$ ist. Falls nun die Symmetrie spontan gebrochen ist, d.h. $Q^s(t)\,|0\rangle \neq 0$, so ist wegen der Translationsinvarianz des Vakuums

$$\begin{aligned} \|Q^s(t)\,|0\rangle\,\|^2 &= \left\langle 0 \,\middle|\, (Q^s(t))^2 \,\middle|\, 0 \right\rangle = \\ &= \left\langle 0 \,\middle|\, \int d^3x\, J_0^s(x) Q^s(t) \,\middle|\, 0 \right\rangle = \\ &= \langle\, 0 \mid J_0^s(0) Q^s(0) \mid 0\,\rangle \int d^3x = \infty \end{aligned}$$

wie oben bereits gezeigt. $Q^s(t)$ ist also dann kein wohldefinierter Operator auf dem Fockraum.

Wir betrachten nun als Fockraum nicht nur den Mehrteilchenraum zu den Feldern, die in $\mathcal{L}$ explizit vorkommen, sondern wir nehmen weiter alle die freien Zustände hinzu, die durch die betrachtete Theorie beschrieben werden sollen, z.B. gebundene Zustände. Sei nun $\phi(x)$ ein Feldoperator auf diesem Fockraum, so dass zu Matrixelementen $\langle\, 0 \mid \phi(x) \mid n \,\rangle$ nur Einteilchenzustände beitragen sollen. Man sagt nun genauer als oben, dass eine Symmetrie dann spontan gebrochen heisst, wenn es ein solches $\phi(x)$ gibt mit

$$\langle\, 0 \mid [Q^s(t), \phi(0)] \mid 0 \,\rangle = \eta \neq 0$$

Die Stromerhaltung für den Nötherstrom liefert

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^3x \, [\partial_\mu J^{s\mu}(x), \phi(0)] = \\
&= \partial_0 \int d^3x \, [J_0^s(x), \phi(0)] + \int d^3x \, [\nabla \vec{J}^s(x), \phi(0)] = \\
&= \partial_0 [Q^s(t), \phi(0)] + \int_{|\vec{x}| \to \infty} d\vec{A} \, [\vec{J}^s(x), \phi(0)] = \\
&= \frac{d}{dt} [Q^s(t), \phi(0)]
\end{aligned}$$

d.h. η ist zeitunabhängig.

Wir schieben nun zwischen $Q^s(t)$ und $\phi(0)$ ein vollständiges System ein. Wegen den Eigenschaften von $\phi(x)$ genügt es, sich auf Einteilchenzustände zu beschränken. Ein solches System von Zuständen mit scharfem Impuls p ist gegeben durch $|pn\rangle$, wobei n alle weiteren nötigen Quantenzahlen meint und $p^2 = m_n^2 \geq 0$ gilt. Die Normierung sei so gewählt, dass die Poincaregruppe unitär auf diesen Zuständen dargestellt ist:

$$\begin{aligned}
\langle p'n' \, | pn \rangle &= (2\pi)^3 \, 2p_n^0 \, \delta_{nn'} \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \, , \quad p_n^0 > 0 \\
1 &= \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_n^0} \, |pn\rangle \, \langle pn|
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\eta = \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_n^0} (\langle\, 0 \mid Q(t) \mid pn \,\rangle \, \langle\, pn \mid \phi(0) \mid 0 \,\rangle - \langle\, 0 \mid \phi(0) \mid pn \,\rangle \, \langle\, pn \mid Q(t) \mid 0 \,\rangle) =$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \lim_{V\to\infty} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_n^0} \int_V d^3x \\
& (\langle\, 0 \mid J_0(x) \mid pn \,\rangle \langle\, pn \mid \phi(0) \mid 0 \,\rangle - \langle\, 0 \mid \phi(0) \mid pn \,\rangle \langle\, pn \mid J_0(x) \mid 0 \,\rangle)
\end{aligned}
$$

Wir verwenden nun $J_0(x) = e^{ipx} J_0(0) e^{-ipx}$. Weiter ist

$$
\begin{aligned}
\lim_{V\to\infty} \int_V d^3x \, e^{\pm i\vec{p}\vec{x}} &= \delta^3(\vec{p}) \\
\Longrightarrow \lim_{V\to\infty} \int_V d^3x \int d^3p \, f(\vec{p}) \, e^{\pm i\vec{p}\vec{x}} &= \lim_{|\vec{p}|\to 0} f(\vec{p})
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
\eta \; = \; & \lim_{|\vec{p}|\to 0} \sum_n \frac{1}{(2\pi)^3 2p_n^0} \\
& (e^{-ip_n^0 t} \langle\, 0 \mid J_0(x) \mid pn \,\rangle \langle\, pn \mid \phi(0) \mid 0 \,\rangle - e^{+ip_n^0 t} \langle\, 0 \mid \phi(0) \mid pn \,\rangle \langle\, pn \mid J_0(x) \mid 0 \,\rangle)
\end{aligned}
$$

Da η zeitunabhängig und $\neq 0$ war, muss es einen Zustand $|pn\rangle$ geben mit

$$
\lim_{|\vec{p}|\to 0} p_n^0 = 0, \; \text{d.h.} \, m_n = 0
$$

$$
\lim_{|\vec{p}|\to 0} \frac{1}{p_n^0} \langle\, 0 \mid J_0(x) \mid pn \,\rangle \langle\, pn \mid \phi(0) \mid 0 \,\rangle \;\neq\; 0
$$

Diesen Zustand nennt man *Goldstone-Teilchen.*

5.3 Brechung von Symmetrien in der QCD

Im Folgenden wollen wir uns mit der starken Wechselwirkung beschäftigen. Die Lagrangedichte der QCD ist gegeben durch

$$
\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{k=1}^{N_f} \bar{\psi}_k(x) \, (i\gamma^\mu \partial_\mu - qA_\mu(x) - m_k) \, \psi_k(x) + \text{ Gluonterme}
$$

wobei N_f die Zahl der betrachteten Flavors ist. Die Massenmatrix wurde bereits diagonalisiert. In der Weyl-Basis sind die links- und rechtshändigen Felder gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\psi_L(x) &= \begin{pmatrix} \xi(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\psi_R(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

mit $\psi(x) = \psi_L(x) + \psi_R(x)$. Wir verwenden die bereits früher eingeführten Bezeichnungen (siehe das Kapitel *Spinoren und die Diracgleichung*) und schreiben in der Weyl-Basis

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QCD} &= \sum_{k=1}^{N_f} \Big\{ \xi_k^+(x)\, \tilde{\sigma}^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu(x))\, \xi_k(x) + \eta_k^+(x)\, \sigma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu(x))\, \eta_k(x) + \\ &- (\eta_k^+(x)\xi_k(x) + \xi_k^+(x)\eta_k(x))\, m_k \Big\} + \text{ Gluonterme}\end{aligned}$$

Wir beschränken uns nun auf die Flavor up und down ($N_f = 2$). Dann ist annähernd $m_u = m_d =: m$ und $\mathcal{L}_{QCD}$ ist invariant unter $\psi_i(x) \to g_{ij}\, \psi_j(x)$ mit $g \in U(N_f) = SU(N_f) \otimes U(1)$.

Da typische Hadronmassen um 2 bis drei Grössenordnungen über den Stromquarkmassen der leichten Quarks up und down liegen, liegt es nahe, die Massenterme in der Lagrangedichte der QCD zu vernachlässigen und sie später z.B. störungstheoretisch zu behandeln. Dann ist $\mathcal{L}_{QCD}$ invariant unter

$$\begin{aligned}\xi_i(x) &\longrightarrow g_{ij}\, \xi_j(x) \\ \eta_i(x) &\longrightarrow g'_{ij}\, \eta_j(x)\end{aligned}$$

mit $g \otimes g' \in (SU(2)_L \otimes U(1)_L) \otimes (SU(2)_R \otimes U(1)_R)$. Links- und rechtshändige Felder können also unabhängig voneinander transformiert werden. Diese Symmetrie wird aber auf dem Fockraum nicht realisiert sein, wie das Experiment durch das Fehlen entsprechend entarteter Zustände nahelegt. Sei

$$\begin{aligned}g &= B_L\, \lambda\, , \quad B_L \in SU(2)_L\, , \quad \lambda \in U(1)_L \\ g' &= B_R\, \lambda'\, , \quad B_R \in SU(2)_R\, , \quad \lambda' \in U(1)_R\end{aligned}$$

Die chiralen Transformationen bestehen aus der Untergruppe mit $B_L = B_R = 1,\ \lambda' = \lambda^{-1}$, d.h. in der Weyl-Basis ist

$$\psi \longrightarrow \psi' = \begin{pmatrix} \lambda\xi \\ \lambda^{-1}\eta \end{pmatrix} = e^{i\varphi\gamma_5}$$

mit

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\, , \quad \lambda = e^{i\varphi}$$

Man nimmt an, dass diese Symmetrie in der QCD gebrochen ist (z.B. durch Instantoneffekte). Dies kann man durch spontane Symmetriebrechung erreichen, oder aber in einer effektiven Theorie mit einem Hamiltonoperator, der diese Symmetrie explizit bricht.

Betrachten wir nun die chirale Flavorsymmetrie $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. Wir werden im Folgenden annehmen, dass diese Symmetrie spontan auf die diagonale Untergruppe $SU(2)$ heruntergebrochen wird. Dazu definieren wir Operatoren

$$\begin{aligned}
\vec{Q}_L &= \int d^3x\, \xi^+(x)\vec{\sigma}\xi(x) \\
\vec{Q}_R &= \int d^3x\, \eta^+(x)\vec{\sigma}\eta(x) \\
U &= \exp(\frac{i}{2}(\vec{a_L}\vec{Q_L} + \vec{a_R}\vec{Q_R}))
\end{aligned}$$

wobei $\xi(x), \eta(x)$ jetzt Feldoperatoren sind und U eine Darstellung von $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ liefert. $\vec{\sigma}$ sind die Paulimatrizen. Es gilt:

$$\vec{a_L}\vec{Q_L} + \vec{a_R}\vec{Q_R} = \frac{1}{2}(\vec{a}_L + \vec{a}_R)(\vec{Q}_L + \vec{Q}_R) + \frac{1}{2}(\vec{a}_L - \vec{a}_R)(\vec{Q}_L - \vec{Q}_R)$$

Wir nehmen nun an, dass die Symmetrie spontan so gebrochen ist, dass das Vakuum nur noch invariant ist, falls $\vec{a}_L = \vec{a}_R$, d.h. falls sich links- und rechtshändige Felder gleich transformieren. Das Vakuum sei also nur invariant unter der diagonalen Untergruppe $SU(2) \subset SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, d.h.

$$\begin{aligned}
\exp(\frac{i}{4}(\vec{a}_L + \vec{a}_R)(\vec{Q}_L + \vec{Q}_R))\,|0\rangle &= |0\rangle \\
\exp(\frac{i}{4}(\vec{a}_L - \vec{a}_R)(\vec{Q}_L - \vec{Q}_R))\,|0\rangle &\neq |0\rangle
\end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass die Operatoren

$$\exp(\frac{i}{4}(\vec{a}_L + \vec{a}_R)(\vec{Q}_L + \vec{Q}_R))$$

eine Darstellung der $SU(2)$-Gruppe bilden, während die Operatoren

$$\exp(\frac{i}{4}(\vec{a}_L - \vec{a}_R)(\vec{Q}_L - \vec{Q}_R))$$

überhaupt keine Gruppe bilden. Wir definieren nun die achsiale Ladung durch

$$\vec{Q}_A = \vec{Q}_L - \vec{Q}_R = \int d^3x\, \Psi^+(x)\gamma_5\vec{\sigma}\Psi(x)$$

Die Symmetriebrechung lässt sich also ausdrücken durch

$$\vec{Q}_A \left|0\right\rangle \neq 0$$

Sei weiter

$$J^k_{A,\mu}(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\sigma^k\Psi(x)$$

der achsiale Strom, so dass $Q^k_A = \int d^3x\, J^k_{A,0}(x)$. Da wir Massenterme in $\mathcal{L}_{QCD}$ vernachlässigen, ist dieser Strom ein erhaltener Nötherstrom mit $\partial^\mu J^k_{A,\mu}(x) = 0$.

5.4 Pionen als Goldstoneteilchen, PCAC

Wie oben gezeigt, existieren nun 3 Goldstoneteilchen zu dieser spontan gebrochenen Symmetrie. Praktischerweise geht man nun auf sphärische Komponenten σ^m, $m = +, -, 0$ über. Wir beschränken uns im Folgenden auf ein festes m und lassen m weg.

Das entsprechende Goldstoneteilchen (mit scharfem Impuls p) sei mit $|A,p\rangle$ bezeichnet. Betrachten wir zunächst das Matrixelement $\langle\, 0 \mid J_{A,\mu}(0) \mid A,p\,\rangle$. Wie wir sehen werden, ist für den Spin s eine mögliche Wahl $s = 0$, auf die wir uns ab jetzt beschränken. Um die Lorentzstruktur dieses Matrixelements zu erhalten, beachten wir, dass dann gilt:

$$\begin{aligned} U_\Lambda \left|A,p\right\rangle &= \left|A,\Lambda p\right\rangle \\ U_\Lambda \Psi(0) U_\Lambda^{-1} &= S(\Lambda^{-1})\Psi(0) \\ \Longrightarrow\; U_\Lambda J_{A,\mu}(0) U_\Lambda^{-1} &= (\Lambda^{-1})_\mu^{\ \nu} J_{A,\nu}(0) \\ (\Lambda^{-1})_\mu^{\ \nu} &= \Lambda^\nu_{\ \mu} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle\, 0 \mid J_{A,\mu}(0) \mid A,p\,\rangle &= \left\langle 0 \,\middle|\, U^{-1}U J_{A,\mu}(0) U^{-1}U \,\middle|\, A,p \right\rangle = \\ &= \Lambda^\nu_{\ \mu}\, \langle\, 0 \mid J_{A,\nu}(0) \mid A,\Lambda p\,\rangle \end{aligned}$$

Man beachte, dass dabei die Unitarität von U_Λ und somit die Normierung von $|A,p\rangle$ eingeht. Multipliziert man von links mit p^μ und summiert, so folgt

$$p^\mu \langle\, 0 \mid J_{A,\mu}(0) \mid A,p\,\rangle = \Lambda^\nu{}_\mu p^\mu \, \langle\, 0 \mid J_{A,\nu}(0) \mid A,\Lambda p\,\rangle$$

Setzt man

$$p^\mu \langle\, 0 \mid J_{A,\mu}(0) \mid A,p\,\rangle =: f(p)$$

so folgt also

$$f(\Lambda p) = f(p) \implies f(p) = g(p^2) = g(m_A^2) = const$$

Der einzige Vierervektor, dessen Skalarprodukt mit p^μ nur noch eine Funktion von m_A ist, ist p_μ (bis auf einen konstanten Vorfaktor). Also ist

$$\langle\, 0 \mid J_{A,\mu}(0) \mid A,p\,\rangle = c(m_A)\, p_\mu$$

Ferner sieht man daran, dass $|A,p\rangle$ ein Teilchen mit negativer Parität sein muss. Da es insgesamt 3 dieser Teilchen mit verschiedenen Isospinkomponenten k geben muss, identifiziert man $|A,p\rangle$ experimentell mit den *Pionen*.

Wir definieren nun einen Feldoperator $a^+(p)$ durch

$$|A,p\rangle =: a^+(p)\,|0\rangle$$

Sei $a(p)$ der dazu adjungierte Operator. Aus der Normierung von $|A,p\rangle$ geht hervor, dass

$$[a(p), a^+(p')] = (2\pi)^3\, 2p^0\, \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

Den zugehörigen Feldoperator im Ortsraum definieren wir durch

$$\phi(x) := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\, (a(p)e^{-ipx} + a^+(p)e^{ipx})$$

Damit haben wir

$$\langle\, 0 \mid \phi(0) \mid A,p\,\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\, \left\langle 0 \,\middle|\, a(k)\, a^+(p) \,\middle|\, 0 \right\rangle = 1$$

Aus dem Goldstone-Theorem oben folgt damit, dass

$$\lim_{|\vec{p}|\to 0} \frac{1}{p^0} \langle\, 0 \mid J_{A,0}(0) \mid A,p\,\rangle \langle\, A,p \mid \phi(0) \mid 0\,\rangle = c(m_A) \neq 0$$

Experimentell identifiziert man $c(m_A)$ mit der schwachen Pion-Zerfallskonstante, wobei allerdings $k = 1, 2$ zu nehmen ist, da nur für die geladenen Pionen diese Zahl experimentell bekannt ist. Auf eine genauere Betrachtung des Isospins soll hier aber nicht eingegangen werden.

Aus der Translationsinvarianz

$$\begin{aligned} J_{A,\mu}(x) &= e^{ipx} J_{A,\mu}(0) e^{-ipx} \\ \Longrightarrow \langle\, 0 \mid J_{A,\mu}(x) \mid A, p \,\rangle &= e^{-ipx} \langle\, 0 \mid J_{A,\mu}(0) \mid A, p \,\rangle \end{aligned}$$

und der Stromerhaltung $\partial^\mu J_{A,\mu}(x) = 0$ folgt

$$0 = \partial^\mu \langle\, 0 \mid J_{A,\mu}(x) \mid A, p \,\rangle = -i\, m_A^2\, c(m_A)$$

und wegen $c(m_A) \neq 0$ haben wir somit $m_A = 0$. Das Goldstoneboson ist also masselos wie erwartet. Da jedoch die Pionen eine (wenn auch kleine) Masse besitzen, ist unser Schema hier nur als Näherung zu verstehen, das nur im Limes verschwindender Quarkmassenterme in $\mathcal{L}_{QCD}$ gilt.

Für nichtverschwindende Quarkmassenterme ist also nun $m_A = m_\pi > 0$ und $\partial^\mu J_{A,\mu}(x) \neq 0$. Wegen $\langle\, 0 \mid \phi(0) \mid A, p \,\rangle = 1$ und der Translationsinvarianz können wir schreiben

$$\partial^\mu \langle\, 0 \mid J_{A,\mu}(x) \mid \pi, p \,\rangle = -i\, m_\pi^2\, c(m_\pi)\, \langle\, 0 \mid \phi(x) \mid \pi, p \,\rangle$$

Das Experiment legt nun die Annahme nahe, dass man allgemein in Matrixelementen zwischen den leichtesten hadronischen Zuständen

$$\partial^\mu J_{A,\mu}(x) = -i m_\pi^2 c(m_\pi) \phi(x)$$

als Näherung schreiben darf (*PCAC, partially conserved axial-vector current*). Praktisch bedeutet das, dass man annimmt, dass für Impulsüberträge $|q^2| \leq m_\pi^2$ Matrixelemente von $\partial^\mu J_{A,\mu}(x)$ dominiert werden durch einen Pionpol der Form $1/(q^2 - m_\pi^2)$.

6 Vielteilchenwellenfunktionen

Ausgearbeitet von Claus Münz

Zur Beschreibung eines Einteilchenzustandes mit Masse m und positiver Energie genügt, wie wir in Abschnitt 1.7 sahen, die Angabe einer Funktion

$$\xi : H_m^+ \to C^2$$

wobei $H_m^\pm$ die positive bzw. negative Massenschale angibt

$$H_m^\pm = \{p \in R^4,\ p^2 = m^2,\ sign(p_0) = \pm 1\}$$

Zur Beschreibung von k unterscheidbaren Teilchen benötigen wir Funktionen auf dem k-fachen Tensorprodukt dieser Räume

$$\xi_1 \otimes ... \otimes \xi_k :\ \otimes_k H_m^+ \to\ \otimes_k C^2$$

Anmerkung: Bei mehreren ununterscheidbaren Fermionen muss die Wellenfunktion dem Pauli-Prinzip genügen. Der Mehrteilchenhilbertraum ist dann durch die äussere Algebra oder den Fockraum ΛH_m^+ von H_m^+ gegeben. Es ist

$$\Lambda H_m^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n H_m^+$$

wobei

$$\Lambda^n H_m^+ \subset \otimes_n H_m^+$$

als Teilmenge des n-fachen Tensorraumes von H_m^+ die schiefen Tensoren bezeichnet, d.h.

$$\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_n = \sum_{\sigma \in S^n} \text{sign } (\sigma)\ \xi_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes \xi_{\sigma(n)}$$

Bei Bosonen werden analog nur Wellenfunktionen aus dem symmetrischen Teil des Tensorraumes verwendet.

Sei nun g ein Element der Lorentzgruppe und $\Lambda = \rho(g)$ die entsprechende Transformationsmatrix für Vierervektoren, so ist die Darstellung D(g) von g im k-fachen Tensorraum gegeben durch

$$D(g)\,(\xi_1(p_1) \otimes ... \otimes \xi_k(p_k))\ = g\ \xi_1(\Lambda^{-1}p_1) \otimes ... \otimes g\ \xi_k(\Lambda^{-1}p_k)$$

Das Skalarprodukt ist dann analog zum Einteilchenfall folgendermassen definiert:

$$\begin{aligned} < \xi_1' \otimes ... \otimes \xi_k' | \xi_1 \otimes ... \otimes \xi_k > &= \int \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \xi_1'^*(p_1) \tilde{\sigma}(p_1) \xi_1(p_1) ... \\ & \int \frac{d^3 p_k}{p_k^0} \xi_1'^*(p_k) \tilde{\sigma}(p_k) \xi_1(p_k) \end{aligned}$$

Wir verwenden im folgenden die bra-ket Schreibweise: $| >$ gibt dabei den Vektor aus dem jeweiligen Tensorraum an, $< |$ den hermitesch-adjungierten Vektor und $< | >$ ist das oben definierte Skalarprodukt.

6.1 Zweiteilchenwellenfunktionen

Wir setzen die Wellenfunktion für einen Zweiteilchenzustand mit Gesamtimpuls $\vec{P} = \vec{0}$, Schwerpunktsenergie $M > 2m$ und relativem Bahndrehimpulszustand lm folgendermassen an:

$$\begin{aligned} \psi(Me_0, \xi_1, \xi_2, lm)(p_1, p_2) &= \delta^{(4)}(Me_0 - p_1 - p_2) \\ & \sigma(p_1)^{1/2} \xi_1 \otimes \ \sigma(p_2)^{1/2} \xi_2 \ Y_{lm}(\widehat{p_1}). \end{aligned}$$

Hierbei sind ξ_1 und ξ_2 feste, d.h. vom Impuls p unabhängige Zweierspinoren und definieren den Spinzustand der beiden Teilchens in ihrem jeweiligen Ruhesystem, $\widehat{p_1}$ ist der auf 1 normierte räumliche Vektor $\vec{p_1}$. Das Wurzelziehen der Matrix $\sigma(p)$ ist für $p^2 = m^2 > 0$ erlaubt, da diese positiv-definit ist.
Die Transformation eines Systems mit Ruhemasse M in einen Zustand mit Gesamtimpuls P wird durch folgende Matrix bewirkt:

$$g_P = \sigma \left(\frac{P}{M} \right)^{1/2},$$

wobei

$$P^2 = M^2$$

Es gilt also mit $\Lambda_P := \rho(g_P)$ für die Transformation des Viererimpulsvektors:

$$\Lambda_P(Me_0) = P,$$

damit ist $\sigma\left(\frac{P}{M}\right)^{1/2}$ ein Boost.
Die Wurzel einer beliebigen Matrix $\sigma(p)$ kann man explizit angeben:

$$\sigma(p)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2(p^0 + (p^2)^{1/2}}}\left(\sigma(p) + (p^2)^{1/2}\right) \ .$$

Dies sieht man folgendermassen: Für $k^2 = m^2$ gilt:

$$m^2 + \sigma(k)^2 = M^2 + ((k^0)^2 + \vec{k}) - 2k^0\vec{\sigma}(\vec{k}) = 2k^0\sigma(k)$$

Definiere nun

$$\sigma(p) = \sigma(k)^2 \ \Rightarrow \ \sigma(p)^{1/2} = \sigma(k)$$

Koeffizientenvergleich liefert dann:

$$p^0 = 2(k^0)^2 - m^2$$

Ausserdem ist

$$p^2 = \det\sigma(p) = \det\sigma(k)^2 = m^4$$

und damit

$$k^0 = \sqrt{\frac{p^0 + (p^2)^{1/2}}{2}}$$

Der Beweis folgt durch Einsetzen von k^0, m^2 und $\sigma(k)$ in die Gleichung für $\sigma(k)^2$.
Anmerkung: Man kann die Matrix g_P auch in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{aligned} g_P &= \exp(u_P\frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}) \\ &= \cosh\frac{u_P}{2} + \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}\sinh\frac{u_P}{2} \end{aligned}$$

wobei

$$u_P = \operatorname{arctanh}|\vec{V}| \ ; \ \cosh u_P = \gamma_P$$

Die Darstellung T_{g_P} von g_P im Raum der Bispinoren lässt sich schreiben als

$$T_{g_P}\ \xi(p) = g_P\ \Lambda^{-1*}\xi(p)$$

wobei Λ^* hier ein Operator im Raum der Bispinoren ist, der das Argument der Funktion mit Λ transformiert:

$$\Lambda^*\xi(x) = \xi(\Lambda(x)).$$

Für die Wellenfunktionen mit Gesamtviererimpuls P erhält man schliesslich explizit:

$$\begin{aligned} \psi(P,\xi_1,\xi_2,lm)(p_1,p_2) &= \Big(T_{g_p}\psi(Me_0,\xi_1,\xi_2,lm)\Big)(p_1,p_2) \\ &= \delta^{(4)}(P-p_1-p_2)\; Y_{lm}\left(\widehat{\Lambda_P^{-1}p_1}\right) \\ &\quad\; g_P\;\sigma(\Lambda_P^{-1}p_1)^{1/2}\xi_1 \otimes g_P\;\sigma(\Lambda_P^{-1}p_2)^{1/2}\xi_2. \end{aligned}$$

Betrachte nun das Verhalten dieser Wellenfunktionen unter beliebigen Lorentztransformationen g. Es ist zu zeigen, dass sich die Funktionen richtig transformieren.
Es ist

$$T_g = g\otimes g\;\Lambda^{-1*}$$

und

$$T_{g_P} = \sigma^{1/2}(\frac{P}{M})\;\otimes\;\sigma^{1/2}(\frac{P}{M})\;\Lambda_P^{-1*}$$

Hintereinanderschalten der *-Abbildung liefert:

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1*}\;\Lambda_P^{-1*} &= \left(\rho(g)\;\rho(\sigma(\frac{P}{M}))\right)^{-1*} \\ &= \rho\left(g\;\sigma(\frac{P}{M})\right)^{-1*} \end{aligned}$$

und gewährleistet somit die Darstellungseigenschaft.

Das Produkt der beiden Matrizen $\in SL(C^2)$ lässt sich in eine hermitesche, positiv definite Matrix h und eine Matrix u $\in$ SU(2), d.h. in einen Boost und eine Drehung zerlegen:

$$g\;\sigma(\frac{P}{M})^{1/2}\;\; =: g'\;\; =:\;\; h\;u$$

mit

$$h = (g'g'^{+})^{1/2}$$

und einer im allgemeinen von P und g abhängigen Matrix

$$u(P,g) = h^{-1}g'$$

Für h erhält man in unserem Fall:

$$h \;=\; \left(g\sigma(\frac{P}{M})^{1/2}\sigma(\frac{P}{M})^{1/2^{+}} g^{+}\right)^{1/2} \;=\; \left(g\sigma(\frac{P}{M})g^{+}\right)^{1/2} \;=\; \sigma\left(\Lambda\frac{P}{M}\right)^{1/2}$$

Man erhält schliesslich:

$$\begin{aligned} T_g \circ T_{g_P} &= g\ \sigma(\frac{P}{M})^{1/2} \otimes g\ \sigma(\frac{P}{M})^{1/2}\ \Lambda^{-1*}\ \Lambda_P^{-1*} \\ &= T_{\sigma\left(\Lambda\ \frac{P}{M}\right)^{1/2}} \circ T_u \\ &= T_{g_{\Lambda P}} \circ T_u \end{aligned}$$

Wir untersuchen jetzt die Wirkung von T_u auf die Wellenfunktion. Sei wiederum $\rho(u) =: \Lambda_u$. Wegen

$$\begin{aligned} \Lambda_u^{-1*}\left(\sigma(p)^{1/2}\right) &= \sigma(\Lambda_u^{-1}p)^{1/2} = (u^{-1}\sigma(p)u^{-1*})^{1/2} \\ &= (u^{+}\sigma(p)u)^{1/2} = (u^{+}\sigma(p)^{1/2}u) \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} &(T_u\psi(Me_0,\xi_1,\xi_2,lm))(p_1,p_2) = \\ &\quad= \delta^{(4)}(M\ e_0 - \Lambda_u^{-1}p_1 - \Lambda_u^{-1}p_2)\ u\ \otimes\ u\ \Lambda_u^{-1*} \\ &\qquad Y_{lm}(\widehat{p_1})\ \sigma(p_1)^{1/2}\xi_1 \otimes\ \sigma(p_2)^{1/2}\xi_2 \\ &\quad= \delta^{(4)}(\Lambda_u\ M\ e_0 - p_1 - p_2)\ Y_{lm}(\widehat{\Lambda_u^{-1}p_1}) \\ &\qquad \sigma(p_1)^{1/2}\ u\ \xi_1 \otimes\ \sigma(p_2)^{1/2}\ u\ \xi_2 \\ &\quad= \delta^{(4)}(M\ e_0 - p_1 - p_2)\ Y_{lm'}(\widehat{p_1})\ D^l_{m'm}\ (u) \\ &\qquad \sigma(p_1)^{1/2}\ u\ \xi_1 \otimes\ \sigma(p_2)^{1/2}\ u\ \xi_2 \\ &\quad= \psi(Me_0,u\xi_1,u\xi_2,lm)(p_1,p_2)\ D^l_{m'm}\ (u) \end{aligned}$$

wobei $D^l(u)$ die Transformationsmatrizen für einen Tensor l-ter Stufe bei der u entsprechenden Drehung sind. Die gesamte Lorentztransformation g ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} T_g\psi(P,\xi_1,\xi_2,lm) &= T_{\Lambda P}\ \circ\ T_u\ \psi(Me_0,\xi_1,\xi_2,lm) \\ &= \psi(\Lambda P,u\xi_1,u\xi_2,lm')\ D^l_{m'm}(u), \end{aligned}$$

Es zeigt sich also, dass sich der Gesamtimpuls mit Λ , die Spinoren mit u und der Bahndrehimpuls mit $D^l(u)$ transformiert, die Funktionen verhalten sich also korrekt unter Lorentztransformationen.
Die Vollständigkeit des Basissystems im Spinorraum ist klar, im Impulsraum ergeben die ursprünglich sechs freien Parameter der beiden Teilchen die vier Gesamtimpulskoordinaten und den Richtungsvektor zwischen den beiden Teilchen, für den die Kugelflächenfunktionen eine vollständige Basis bilden.
Betrachten wir nun das Skalarprodukt zweier Zweiteilchenwellenfunktionen und zeigen ihre Orthogonalität:

$$
\begin{aligned}
&< \psi(P', \xi_1', \xi_2', l'm'), \psi(P, \xi_1, \xi_2, lm) >= \\
&= \int \frac{d^3p_1}{\omega_{p_1}} \int \frac{d^3p_2}{\omega_{p_2}} \; \psi^*(P', \xi_1', \xi_2', l'm') \; (p_1, p_2) \\
&\quad \widetilde{\sigma}(p_1) \otimes \widetilde{\sigma}(p_2) \; \psi(P, \xi_1, \xi_2, lm) \; (p_1, p_2) \\
&= \delta^{(4)}(P - P') \int \frac{d^3p_1}{\omega_{p_1}} \frac{d^3p_2}{\omega_{p_1}} \; \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2) \\
&\quad Y^*_{l'm'}(\widehat{\Lambda_P^{-1}p_1}) Y_{lm}(\widehat{\Lambda_P^{-1}p_1}) \\
&\quad \xi_1'^{\,+} \; \sigma(\Lambda_p^{-1}p_1)^{1/2} g_P^+ \; \widetilde{\sigma}(p_1) \; g_P \; \sigma(\Lambda_P^{-1}p_1)^{1/2} \; \xi_1 \; \otimes \\
&\quad \xi_2'^{\,+} \; \sigma(\Lambda_P^{-1}p_2)^{1/2} g_P^+ \; \widetilde{\sigma}(p_2) \; g_P \; \sigma(\Lambda_P^{-1}p_2)^{1/2} \; \xi_2
\end{aligned}
$$

Benutzt man

$$g_P^+ \; \widetilde{\sigma}(p_1) \; g_P = \widetilde{\sigma} \left(\Lambda_P^{-1}(p_1) \right)$$

und die Beziehung

$$\widetilde{\sigma}^{1/2}(p) \sigma^{1/2}(p) = m \; ,$$

so folgt mit Variablensubstitution $\Lambda_P^{-1} p_i \; \rightarrow \; p_i'$ und "Verschieben" der δ-Funktion wegen der Invarianz des Volumenelementes:

$$
\begin{aligned}
&< \psi(P', \xi_1', \xi_2', l'm'), \psi(P, \xi_1, \xi_2, lm) >= \\
&= \delta^{(4)}(P - P') \; \int \frac{d^3p_1}{\omega_{p_1}} \frac{d^3p_2}{\omega_{p_2}} \; \delta^{(4)}(Me_0 - p_1 - p_2) \\
&\quad Y^*_{l'm'}(\widehat{p_1}) Y_{lm}(\widehat{p_1}) \; \xi_1'^{\,+} m^2 \xi_1 \; \xi_2'^{\,+} m^2 \xi_2 \\
&= \delta^{(4)}(P - P') \; \delta_{ll'} \; \delta_{mm'} \; \xi_1^{+'} \xi_1' \; \xi_2'^{\,+} \xi_2 \; m^4 \\
&\quad \int \frac{p_1^2 dp_1}{\omega_{p_1}^2} \; \delta(M - 2\omega_{p_1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta^{(4)}(P-P')\ \delta_{ll'}\ \delta_{mm'}\ {\xi_1}'\xi_1'\ {\xi_2'}^+\xi_2\ m^4 \\
&\quad \int \frac{p_1 dp_1}{2\omega_{p_1}}\delta\left(p_1 - \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2}\right) \\
&= \delta^{(4)}(P-P')\ \delta_{ll'}\delta_{mm'}{\xi_1'}^+\xi_1'\ {\xi_2'}^+\xi_2\ m^4\ \frac{\sqrt{M^2-4m^2}}{2M}
\end{aligned}
$$

Damit lauten die normierten Zweiteilchenwellenfunktionen:

$$
\begin{aligned}
\psi(P,\xi_1,\xi_2,lm)(p_1,p_2) &= \frac{1}{N_{(2)}}\delta^{(4)}(P-p_1-p_2)\ g_P \otimes g_P \\
&\quad \Lambda_P^{-1*}\left(\sigma(p_1)^{1/2}\xi_1 \otimes \sigma(p_2)^{1/2}\xi_2\ Y_{lm}(\widehat{p_1})\right)\ .
\end{aligned}
$$

mit dem Zweiteilchennormierungsfaktor

$$
N_{(2)}^2 = m^4\ \frac{\sqrt{M^2-4m^2}}{2M}
$$

6.2 S-Matrixelemente ohne Spinwechselwirkung

Betrachte die Matrixelemente des $\widehat{S}$-Operators zwischen den oben definierten Zweiteilchenwellenfunktionen. Es ist:

$$\begin{aligned} < \psi(P', \xi_1', \xi_2', l'm')|\widehat{S}\psi(P, \xi_1, \xi_2, lm) > &= \delta^{(4)}(P - P')\ \delta_{ll'}\ \delta_{mm'} \\ &\quad \xi_1'^{+}\xi_1'\ \xi_2'^{+}\xi_2\ s_l(M) \end{aligned}$$

Da $\widehat{S}$ unitär ist, gilt:

$$s_l(M) = e^{i\delta_l(M)}$$

mit einer rellen Streuphase $\delta_l(M)$. Da das Problem lorentz- und damit auch drehinvariant ist, kann die Streuphase nur von l und dem Lorentzskalar M abhängen. Eine Spinabhängigkeit des Matrixelements nehmen wir vorerst nicht an.

Die Wirkung des Streuoperators $\widehat{S}$ auf eine beliebige Funktion Ψ eines Systems aus zwei Teilchen mit Gesamtmasse M > 2m, wobei m die Einteilchenruhemasse ist, lässt sich dann mit Hilfe der oben genannten Basis $\psi(P, \xi_1, \xi_2, lm)$ für die Zweiteilchenwellenfunktionen folgendermassen schreiben:

$$\widehat{S}|\Psi >= \int d^4P \sum_{lm\ \xi_1\ \xi_2} e^{i\delta_l(M^2)}\ |\psi(P, \xi_1, \xi_2, lm) >< \psi(P, \xi_1, \xi_2, lm)|\Psi >$$

Sei nun $\Psi(p_1, p_2)$ ein beliebiger Zweiteilchenzustand. Dann ist

$$\begin{aligned} (\widehat{S}\Psi)(p_1, p_2) &= \int d^4P \sum_{lm\ \xi_1\ \xi_2} < p_1, p_2|\psi(P, \xi_1, \xi_2, lm) > e^{i\delta_l(M^2)} \\ &\quad \int \frac{d^3p_1'}{\omega_{p_1'}} \int \frac{d^3p_2'}{\omega_{p_2'}}\ < \psi(P, \xi_1, \xi_2, lm)|p_1', p_2' >< p_1', p_2'|\Psi > \\ &=: \int \frac{d^3p_1'}{\omega_{p_1'}} \int \frac{d^3p_2'}{\omega_{p_2'}} A(p_1, p_2, p_1', p_2')\ \Psi(p_1', p_2') \end{aligned}$$

Im folgenden wollen wir die Amplitude A näher bestimmen. Einsetzen der Zweiteilchenbasiswellenfunktionen liefert:

$$A(p_1, p_2, p_1', p_2') = \frac{1}{N_{(2)}^2} \int d^4P \sum_{lm\ \xi_1\ \xi_2} \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2)\ \delta^{(4)}(P - p_1' - p_2')$$

$$\Lambda_P^{-1*}\ \{\ g_P\ \sigma^{1/2}(p_1)\ \xi_1\ \otimes\ g_P\sigma^{1/2}(p_2)\ \xi_2\ \cdot$$
$$\xi_1^+\ \sigma^{1/2}(p_1)\ g_P^+\ \otimes\ \xi_2^+\ \sigma^{1/2}(p_2)\ g_P^+\ Y_{lm}(\widehat{p_1})\ Y_{lm}^*(\widehat{p_1'})\ \}$$
$$\widetilde{\sigma}(p_1')\ \otimes\ \widetilde{\sigma}(p_2')\ \ e^{i\delta_l(M^2)}$$

Die beiden letzten $\widetilde{\sigma}$-Matrizen stammen aus dem Skalarprodukt im betrachteten Bispinorraum. Nun ist

$$\sum_{\xi_i} \xi_i\ \xi_i^+ = id \ \text{ und } \ \sum_{\mathrm{m}} \mathrm{Y}_{\mathrm{lm}}^*(\widehat{\mathrm{p}_1})\ \mathrm{Y}_{\mathrm{lm}}(\widehat{\mathrm{p}_1'}) = \frac{2\mathrm{l}+1}{4\pi}\ \mathrm{P}_{\mathrm{l}}\left(\cos(\widehat{\mathrm{p}_1}, \widehat{\mathrm{p}_1}'\right))$$

Der Kosinus $\cos(\widehat{p_1}, \widehat{p_1}')$ des Winkels zwischen den räumlichen Vektoren $\vec{p_1}$ und $\vec{p_1}'$ lässt sich durch die lorentzinvarianten Mandelstamvariablen

$$s = (p_1 + p_2)^2 \ \text{ und } \ \mathrm{t} = (\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_1')^2$$

ausdrücken. Beachte dabei, dass im Schwerpunktsystem alle 0-Komponenten der Einteilchenimpulse gleich einer festen Energie E sind und $\vec{p_1} = -\vec{p_2}$. Damit folgt:

$$s = 2m^2 + 2E^2$$
$$t = 2m^2 - 2E^2 + 2\vec{p_1}\vec{p_1}' = 4m^2 - s - 2\vec{p_1}\vec{p_1}'$$
$$\vec{p_1}^{\,2} = \vec{p_1'}^{\,2} = E^2 - m^2 = \frac{1}{2}s - 2m^2$$
$$\Rightarrow cos(\widehat{p_1}, \widehat{p_1}') = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2}$$

Definieren wir nun die <u>invariante Streuamplitude</u>

$$A(s,t) = \sum_l \ \frac{2l+1}{4\pi}\ e^{i\delta_l(s)}\ P_l\left(1 + \frac{2t}{s-4m^2}\right)$$

so erhalten wir für die Amplitude A in der Gleichung für die $\widehat{S}$-Matrix:

$$\begin{aligned} A(p_1,p_2,p_1',p_2') \ &= \ \frac{1}{N_{(2)}^2}\ A(s,t)\ \delta^{(4)}(p_1+p_2-p_1'-p_2')\ \Lambda_P^{-1*} \\ &\quad \left(g_P\ \sigma^{1/2}(p_1)\sigma^{1/2}(p_1')\ g_P^+\ \otimes\ g_P\sigma^{1/2}(p_2)\ \sigma^{1/2}(p_2')\ g_P^+\right) \\ &\quad \widetilde{\sigma}(p_1')\ \otimes\ \widetilde{\sigma}(p_2')\ \ e^{i\delta_l(M^2)} \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Zerlegung in eine hermitesche und eine unitäre Matrix wie im letzten Abschnitt lässt sich dies noch vereinfachen:

$$\begin{aligned} A(p_1, p_2, p_1', p_2') &= \frac{1}{N_{(2)}^2} \; A(s,t) \; \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \\ & \quad \sigma^{1/2}(p_1) \; u(p_1, P) \; u(p_1', P)^+ \; \sigma^{1/2}(p_1') \; \otimes \\ & \quad \sigma^{1/2}(p_2) \; u(p_2, P) \; u(p_2', P)^+ \; \sigma^{1/2}(p_2') \\ & \quad \widetilde{\sigma}(p_1') \; \otimes \; \widetilde{\sigma}(p_2') \; e^{i\delta_l(M^2)} \end{aligned}$$

Hierbei sind $u(p_i, P)$ die von den beiden Impulsen P und p_i abhängigen unitären Matrizen.

6.3 Dreiteilchenzustände

Wir wählen zunächst einen Ansatz für die Dreiteilchenfunktion, bei dem das erste Teilchen im Vergleich zu den beiden anderen einen wohlbestimmten Relativimpuls $\vec{k}$ besitzt. Die Konstruktion ist dergestalt, dass sie zur iterativen Erzeugung von n-Teilchen-Wellenfunktionen verwendet werden kann. Betrachte zunächst noch einmal die Zweiteilchenwellenfuktion:

$$\begin{aligned}\psi(P,\xi_1,\xi_2,lm)(p_1,p_2) &= \frac{1}{N_{(2)}}\delta^{(4)}(P-p_1-p_2)\; g_P\otimes g_P \\ &\quad \rho(g_P)^{-1*}\left(\sigma(p_1)^{1/2}\xi_1\otimes\sigma(p_2)^{1/2}\xi_2\; Y_{lm}(\widehat{p_1})\right) \\ &=: \psi'(P,\xi_1,\xi_2,lm)(p_1,p_2)\;\delta^{(4)}(P-p_1-p_2)\end{aligned}$$

die gestrichene Funktion enthält also nicht mehr die δ-Funktion. Für die Dreiteilchenfunktion im Ruhesystem setzen wir an:

$$\begin{aligned}\psi_{(3)}(M_{(3)}e_0,\vec{k},\xi_1,\xi_2,\xi_3,lm) &= \delta^{(4)}(M_{(3)}\;e_0-p_1-p_2-p_3) \\ &\quad \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{p_2}-\vec{p_3}) \\ &\quad \sigma(p_1)^{1/2}\;\xi_1\;\cdot\;\rho(g_k)^{-1*}\;g_k\;\otimes\;g_k \\ &\quad \psi'(M_{(2)}e_0,\xi_1,\xi_2,lm)(p_2,p_3)\end{aligned}$$

Dabei ist $k=(k_0,\vec{k})$ ein Viererimpuls, dessen räumliche Komponente k^0 durch die räumliche Komponente $\vec{k}$ und die invariante Masse $M_{(2)}$ des Systems aus Teilchen 2 und 3 über $k^2=M_{(2)}^2$ festgelegt ist. Die invariante Masse $M_{(2)}$ wiederum liegt über die Beziehung

$$\sqrt{\vec{k}^2+m^2}+\sqrt{\vec{k}^2+M_{(2)}^2}=M_{(3)}\ ,$$

fest, was der 0-Komponente des Impulsvektors des Dreiteilchensystems in seinem Ruhesystem entspricht.

Ein Dreiteilchenzustand mit beliebigem Viererimpuls P lässt sich dann wie üblich bilden:

$$\psi_{(3)}(P,\vec{k},\xi_1,\xi_2,\xi_3,lm)=T_{g_P}\;\psi_{(3)}(M_{(3)}e_0,\vec{k},\xi_1,\xi_2,\xi_3,lm)$$

mit

$$T_{g_P}=g_P\otimes\;g_P\otimes\;g_P\;\Lambda_P^{-1*}$$

Die Norm dieser Zustände ist dann gleich:

$$
\begin{aligned}
&< \psi_{(3)}(P', \vec{k}', \xi_1', \xi_2', \xi_3', l'm') | \psi_{(3)}(P, \vec{k}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, lm) >= \\
&\quad \prod_{i=1}^{3} \int \frac{d^3 p_i}{\omega_{p_i}} \delta^{(4)}(P' - p_1 - p_2 - p_3) \ \ \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2 - p_3) \\
&\quad \Lambda_{P'}^{-1*} \left(\delta^{(3)}(\vec{k'} - \vec{p_2} - \vec{p_3}) \ {\xi_1'}^+ \sigma(p_1)^{1/2} {g_{P'}}^+ \right) \\
&\quad T_{P'} \ T_{k'} \Psi'^*(M'_{(2)} e_0, \xi_1', \xi_2', l'm')(p_2, p_3)) \cdot \\
&\quad \ \tilde{\sigma}(p_1) \ \otimes \ \tilde{\sigma}(p_2) \ \otimes \ \tilde{\sigma}(p_3) \ \ \cdot \\
&\quad \Lambda_P^{-1*} \left(\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p_2} - \vec{p_3}) \ g_P \ \sigma(p_1)^{1/2} \ \xi_1 \right) \\
&\quad T_P \ T_k \ \Psi'(M_{(2)} e_0, \xi_1, \xi_2, lm)(p_2, p_3))
\end{aligned}
$$

Nach Auswerten der Viererdeltafunktion führt man eine Variablensubstitution $\lambda_P^{-1} p_i \to p_i'$ durch und erhält wegen $\vec{p_1'} = -\vec{p_2'} - \vec{p_3'}$ und $M = p_1' + k$ ähnlich wie im Zweiteilchenfall (Integrationsvariable im folgenden wieder ungestrichen):

$$
\begin{aligned}
&< \psi_{(3)}(P', \vec{k}', \xi_1', \xi_2', \xi_3', l'm') | \psi_{(3)}(P, \vec{k}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, lm) >= \\
&\quad \delta^{(4)}(P' - P) \ \delta^{(3)}(\vec{k'} - \vec{k}) \ m^2 \ {\xi_1'}^+ \xi_1 \\
&\quad \prod_{i=1}^{3} \int \frac{d^3 p_i}{\omega_{p_i}} \delta^{(3)}(\vec{k'} + \vec{p_1}) \delta^{(4)}(k - p_2 - p_3) \\
&\quad T_k \psi^*(M'_{(2)} e_0, \xi_1', \xi_2', l'm')(p_2, p_3) \ \ \tilde{\sigma}(\rho(k)^{-1} p_2) \ \otimes \ \tilde{\sigma}(\rho(k)^{-1} p_3) \\
&\quad T_k \psi(M_{(2)} e_0, \xi_1, \xi_2, lm)(p_2, p_3)
\end{aligned}
$$

Man integriert über p_1, führt wiederum eine Variablensubstitution $\Lambda_k^{-1} p_i \to p_i'$ durch und erhält analog dem Zweiteilchenmatrixelement:

$$
\begin{aligned}
&< \psi_{(3)}(P', \vec{k}', \xi_1', \xi_2', \xi_3', l'm') | \psi_{(3)}(P, \vec{k}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, lm) > = \\
&\qquad \delta^{(4)}(P' - P) \ \delta^{(3)}(\vec{k'} - \vec{k}) \ m^6 \ \prod_i {\xi_i'}^+ \xi_i \ \frac{1}{\omega_k} \\
&\qquad \prod_{i=2}^{3} \ \int \frac{d^3 p_i}{\omega_{p_i}} \delta^{(4)}(M_{(2)} - p_2 - p_3) \ Y^*_{l'm'}(\widehat{p_2}) \ Y_{lm}(\widehat{p_2}) \\
&\quad = \ \ \delta^{(4)}(P' - P) \ \delta^{(3)}(\vec{k'} - \vec{k}) \ m^6 \ \prod_i {\xi_i'}^+ \xi_i \ \delta_{ll'} \ \delta_{mm'} \\
&\qquad \frac{1}{\omega_k} \ \int \frac{p_2^2 dp_2}{\omega_2^2} \delta^{(1)}(M_{(2)} - 2\omega_{p_2})
\end{aligned}
$$

$$= \delta^{(4)}(P' - P)\ \delta^{(3)}(\vec{k'} - \vec{k})\ \prod_i \xi_i'^{+} \xi_i \delta_{ll'}\ \delta_{mm'}$$
$$\frac{m^6}{\omega_k}\ \frac{\sqrt{M_{(2)}^2 - 4m^2}}{2M_{(2)}}$$

Die normierten Dreiteilchenwellenfunktionen lauten somit im Ruhesystem:

$$\psi_{(3)}(M_{(3)}e_0, \vec{k}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, lm) =$$
$$\frac{1}{N_{(3)}} \delta^{(4)}(M_{(3)}\ e_0 - p_1 - p_2 - p_3)\ \ \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p_2} - \vec{p_3})$$
$$\sigma(p_1)^{1/2}\ \xi_1\ \cdot\ \Lambda_k^{-1*}\ g_k\ \otimes\ g_k\ \psi'(M_{(2)}e_0, \xi_1, \xi_2, lm)(p_2, p_3)$$

mit dem Normierungsfaktor:

$$N_{(3)}^2 = \frac{m^6}{\omega_k}\ \frac{\sqrt{M_{(2)}^2 - 4m^2}}{2M_{(2)}} = \frac{m^2}{\omega_k}\ N_{(2)}^2$$

6.4 Crossing-Symmetrie

Eine äussere Linie im Feynman-Diagramm kann (ohne Änderung der Pfeilrichtung) als Teilchen im Anfangs- oder als Antiteilchen im Endzustand interpretiert werden. Der Übergang von Teilchen zu Antiteilchen ändert sich die Bedeutung des einer Linie zugeordneten Viererimpulses (Spinvariable wurden hier noch nicht berücksichtigt), er entspricht dem Übergang z.B. von einem Kanal

$$a + b \to c + d$$

zu einem Crossing-Kanal, z.B.

$$a + \bar{d} \to c + \bar{b}$$

oder

$$a + \bar{c} \to \bar{b} + d$$

Die übrigen möglichen Kanäle gehen durch Vertauschen des <u>gesamten</u> Anfangs- und Endzustandes auseinander hervor und werden nicht unterschieden. Betrachte z.B. die elastische Streuung von Teilchen 1 und 2

$$1 + 2 \to 1' + 2'$$

Die Mandelstamvariablen für den Teilchenprozess sind dann

$$s_{qq} = (p_1 + p_2)^2$$
$$t_{qq} = (p_1 - p_1')^2$$
$$u_{qq} = (p_1 - p_2')^2$$

Ein Vertauschen $p_1 \leftrightarrow -p_2'$ beschreibt den Prozess $\bar{2}' + 2 \to \bar{1}' + 1$ der Streuung eines Teilchens an einem Antiteilchen mit den neuen Mandelstamvariablen:

$$s_{\bar{q}q} = t_{qq}$$
$$t_{\bar{q}q} = s_{qq},$$

d.h. in der invarianten Amplitude werden s und t vertauscht:

$$A_{\bar{q}q}^{\bar{2}'2\to 1'\bar{1}}(s_{\bar{q}q}, t_{\bar{q}q}) = A_{qq}^{12\to 1'2'}(t_{\bar{q}q}, s_{\bar{q}q})$$

Hierbei ist allerdings zu beachten, dass die Argumente in der Antiteilchenstreuamplitude nicht aus einem physikalisch erlaubten Bereich stammen. Um die Streuung reeller (Anti-) Teilchen zu beschreiben, muss man die Analyzität der Streuamplituden fordern (wie sie z.B. bei Berechnung über Feynmandiagramme gegeben ist) und die Teilchenstreuamplitude in der s,t-Ebene analytisch fortsetzen.
Bei Vertauschen von Teilchen 1 und 1', d.h. $p_1 \leftrightarrow -p_2'$, drückt man die invariante Amplitude zweckmässigerweise durch s und u aus, denn dann gehen diese Variablen ineinander über.

$$A_{\bar{q}q}^{\bar{1}'2\to\bar{1}2'}(s_{\bar{q}q}, u_{\bar{q}q}) = A_{qq}^{12\to 1'2'}(u_{\bar{q}q}, s_{\bar{q}q})$$

Anmerkung: Die hier geschilderte Crossing-Symmetrie geht über die CPT-Invarianz hinaus, bei der der gesamte Anfangs- und Endzustand vertauscht wird.

7 Unitäre Darstellungen der Poincarégruppe

Ausgearbeitet von Uli Bohn

Im folgenden sollen unitäre Darstellungen für die doppelte Überlagerungsgruppe der Poincarégruppe $\mathcal{P} = SL(2,\mathbf{C}) \otimes \mathbf{R}^4$ konstruiert werden. $\mathcal{P}$ ist definiert mit dem semidirekten Produkt

$$(g_1, a_1)(g_2, a_2) = (g_1 g_2,\ a_1 + \rho(g_1)a_2), \quad g_i \in SL(2,\mathbf{C}), \quad a_i \in \mathbf{R}^4.$$

Diese Darstellungen lassen sich charakterisieren durch Masse m und Spin J.

7.1 Darstellungen mit Masse m

Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen auf $SL(2,\mathbf{C})$

$$\mathcal{H} = \{\psi : SL(2,\mathbf{C}) \to \mathbf{C},\ \|\psi\| < \infty\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \int dg\ \psi^*(g)\ \psi'(g).$$

dg ist das linksinvariante Haarsche Mass auf $SL(2,\mathbf{C})$, das invariant ist unter den Linkstranslationen

$$\int dg\ \psi^*(g)\ \psi'(g) = \int dg\ \psi^*(hg)\ \psi'(hg), \qquad h \in SL(2,\mathbf{C})$$

und bis auf einen konstanten Faktor eindeutig ist.

Auf $\mathcal{H}$ ist dann durch

$$(T_{(g,a)}\psi)(g') = e^{-i\frac{m}{2}tr(g'^{\dagger}\tilde{\sigma}(a)g')}\ \psi(g^{-1}g')$$

mit $(g,a) \in \mathcal{P}, g' \in SL(2,\mathbf{C})$ eine Darstellung von $\mathcal{P}$ definiert, d.h.

$$(T_{(g_1,a_1)}\ T_{(g_2,a_2)}\psi)(g) = (T_{(g_1 g_2,\ a_1+\rho(g_1)a_2)}\psi)(g).$$

Abgesehen von dem Exponentialfaktor entspricht dies einer Linkstranslation der Funktion ψ.

Für die Generatoren der Translationen

$$P_\mu \psi(g) = i \frac{\partial}{\partial a^\mu} (T_{(1,a)}\psi)(g)\Big|_{a=0}$$

erhält man Eigenwerte

$$P_\mu \; \psi(g) = p_\mu \; \psi(g) = m \; (\rho(g^{-1}))^0{}_\mu \psi,$$

mit $p^2 = p_\mu p^\mu = m^2$. T ist eine unitäre Darstellung von $\mathcal{P}$, sie ist jedoch nicht irreduzibel. Zur weiteren Ausreduktion dieser Darstellung benutzt man nun die folgende Tatsache.

Die Gruppe $SU(2)$ operiert ebenfalls auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ durch die Rechtstranslation

$$(T_u \psi)(g) = \psi(gu), \quad u \in SU(2).$$

Da $T_{(g,a)}$ im wesentlichen eine Linkstranslation ist, kommutieren die beiden Operationen

$$[T_u, T_{(g,a)}] \; \psi = 0,$$

und damit kommutiert $T_{(g,a)}$ auch mit den Generatoren von $SU(2)$

$$(J_l \psi)(g) = -i \frac{d}{dt} (T_{u_l(t)} \psi)(g)\Big|_{t=0}, \quad l = 1, 2, 3$$

wobei

$$u_l(t) = exp(-it\sigma_l/2).$$

Also zerfällt der Hilbertraum $\mathcal{H}$ in die direkte Summe

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{JM} \mathcal{H}_{JM}.$$

Die Unterräume $\mathcal{H}_{JM}$ sind invariant unter $T_{(g,a)}$ und liefern unitäre Darstellungen von $T_{(g,a)}$. Man kann zeigen:

- Die Darstellungen auf $\mathcal{H}_{JM}$ sind irreduzibel
- Die Darstellungen für (J,M) und (J',M') sind unitär äqivalent für $J = J'$ und M, M' beliebig, sie sind inäquivalent für $J \neq J'$.

Bis auf Äquivalenz sind die Darstellungen also eindeutg charakterisiert durch den Gesamtdrehimpuls J und die Masse m.

7.2 Darstellungen zu Masse m = 0

Nun werden Darstellungen zu Masse $m = 0$ und Helizität k konstruiert. Betrachte hierzu den Hilberraum $\mathcal{H}^0$ aller quadratintegrablen Funktionen auf $\mathbf{C}^2$

$$\mathcal{H}^0 = \{\psi : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}\ ,\ \|\psi\| < \infty\}$$

wobei das Skalarprodukt definiert ist durch

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \int d^4z\ \psi^*(z)\ \psi'(z).$$

Für $z = (u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) \in \mathbf{C}^2$ ist $d^4z = du_1\ du_2\ dv_1\ dv_2$. Eine Darstellung von $\mathcal{P}$ auf $\mathcal{H}^0$ ist gegeben durch

$$(T_{(g,a)}\psi)(z) = e^{-\frac{i}{2}z^\dagger \sigma(a) z}\ \psi(g^{-1}z),$$

die wiederum unitär jedoch nicht irreduzibel ist. Bevor diese Darstellung auf $\mathcal{H}^0$ ausreduziert wird, soll zunächst

$$P_\mu \psi(z) = i\frac{\partial}{\partial a^\mu}(T_{(1,a)}\psi)(z)\Big|_{a=0}$$

berechnet werden.

Einem Element $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$ lässt sich ein Vektor $\mathcal{Z}^\mu \in \mathbf{R}^4$ wie folgt zuordnen. Definiere die hermitesche 2×2 Matrix

$$Z = zz^\dagger.$$

Einen Vierervektor $\mathcal{Z}^\mu$ erhält man dann durch

$$\mathcal{Z}^\mu = \frac{1}{2}tr(\sigma_\mu Z) = \frac{1}{2}z^\dagger \sigma_\mu z,$$

der wegen $\mathcal{Z}^2 = detZ = 0$ lichtartig ist. Die oben angegebene Darstellung lässt sich daher schreiben

$$(T_{(g,a)}\psi)(z) = e^{-ia\mathcal{Z}}\ \psi(g^{-1}z),$$

also

$$P_\mu \psi(z) = \mathcal{Z}_\mu \psi(z)$$

mit $\mathcal{Z}^2 = p^2 = 0$. Das heisst, diese Darstellung beschreibt masselose Teilchen.

Zur weiteren Ausreduktion des Hilbertraumes $\mathcal{H}^0$ betrachte die folgende Operation von $U(1)$ auf $\mathcal{H}^0$

$$(T_y\psi)(z) = \psi(zy), \quad y \in U(1),$$

Diese Darstellung ist unitär, und es gilt

$$[T_y, T_{(g,a)}]\ \psi = 0$$

Die irreduziblen Darstellungen von U(1) sind eindimensional und von der Form

$$\rho : y \mapsto y^k, \quad k \in Z.$$

$\mathcal{H}^0$ zerfällt in die direkte Summe

$$\mathcal{H}^0 = \bigoplus_k \mathcal{H}_k,$$

wobei für $\psi \in \mathcal{H}_k$ mit $y(t) = e^{-it}$ gilt

$$(J_0\psi)(z) = i\frac{d}{dt}(T_{y(t)}\psi)(z) = k\ \psi(z)$$

also

$$(T_y\psi)(z) = y^k\ \psi(z).$$

Dabei entspricht $k/2$ der Helizität der masselosen Teilchen.

Für $k = -1$ (Helizität $-1/2$) ist

$$\xi(x) = \int d^4z\ \psi(z)\ z\ e^{-\frac{i}{2}z^*\sigma(x)z}$$

mit $\psi(zy) = y^{-1}\psi(z)$ Lösung der Weyl-Gleichung

$$i\sigma^\mu\partial_\mu\xi(x) = 0$$

Zum Beweis betrachte man für beliebige $z_i \in \mathbf{C}^2, i = 1, 2, 3, 4$ die Identität

$$z_1^\dagger\sigma_\mu z_2\ z_3^\dagger\sigma^\mu z_4 = \epsilon(z_1, z_3)^*\ \epsilon(z_2, z_4),$$

wobei

$$\epsilon(v,w) = {}^t v \epsilon w, \quad v,w \in \mathbf{C}^2$$

antisymmetrisch in den Argumenten ist. Wendet man $\sigma^\mu \partial_\mu$ auf $\xi(x)$ an und multipliziert von links mit $\eta^\dagger$, so erhält man im Integranden den Ausdruck

$$\eta^\dagger \sigma_\mu z \; z^\dagger \sigma^\mu z = \epsilon(\eta, z)^* \; \epsilon(z,z) = 0.$$

Da dies für beliebiges $\eta^\dagger \in \mathbf{C}^2$ gilt, löst $\xi(x)$ die Weyl-Gleichung.

Für $k = 1$ (Helizität 1/2) erhält man

$$\xi(x) = \int d^4 z \; \psi(z) \; \epsilon z^\dagger \; e^{-\frac{i}{2} z^\dagger \sigma(x) z}$$

mit $\psi(zy) = y\psi(z)$ als Lösung der Weyl-Gleichung

$$i\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi(x) = 0.$$

Analog lassen sich Felder zu $k = 2$ konstruieren

$$F^{\mu\nu}(x) = \int d^4 z \epsilon(\sigma^\mu z, \sigma^\nu z) \psi(z) e^{-\frac{i}{2} z^\dagger \sigma(x) z}$$

mit $\psi(zy) = y^{-2}\psi(z)$. Diese Felder sind Lösungen zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

Wegen

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\kappa\lambda} \; \epsilon(\sigma^\kappa z, \sigma^\lambda z) = \epsilon(\sigma^\mu z, \sigma^\nu z)$$

folgt

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} = -iF^{\mu\nu}.$$

Das heisst, F erfüllt die Maxwell Gleichungen.