Darstellungen der Poincaregruppe
Die S-Matrix im Wechselwirkungsbild
Gapgleichung und chirale Symmetriebrechung

ausgearbeitet von Jörg Resag
zum Teil nach Vorträgen von H.R.Petry
Institut für theoretische Kernphysik
Nuallee 14-16
D-5300 Bonn, Germany

1992

Zusammenfassung

Die hier vorliegende Sammlung schließt an die *Sammlung von Vorlesungen zu speziellen Themen von H.R.Petry, 1991* [Petry] an. Die dort verwendete Notation wird auch hier benutzt.

Inhaltsverzeichnis

1 Darstellung der Poincaregruppe auf ebenen Wellen

Dieses Kapitel gibt einen Überblick zu Darstellungen mit Masse > 0 der Poincaregruppe auf ebenen Wellen. Dabei wurden die Bezeichnungen aus **H.R.Petry: Eine Sammlung von Vorlesungen zu speziellen Themen** [**Petry**] übernommen. Die dort hergeleiteten Zusammenhänge werden hier vorausgesetzt (Weyl-Basis für $s = 1/2$).

Im Folgenden arbeiten wir mit der Ket-Schreibweise. Sei dazu $|\vec{x}, t\rangle$ ein Vektor (genauer: eine Distribution) mit

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, t \,|\vec{x}', t\rangle &= \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ 1 &= \int d^3x \; |\vec{x}, t\rangle \, \langle \vec{x}, t| \end{aligned}$$

In der Weyl-Basis sind Lösungen der Diracgleichung (Spin 1/2) zu scharfem Impuls und z-Komponente des Spins s_3 (wird unten noch definiert) gegeben durch

$$\psi_{p,s_3}(x) = e^{-ipx}\, \psi_{s_3}(p) = e^{-ipx} \begin{pmatrix} \xi_{s_3}(p) \\ \tilde{\sigma}\left(\frac{p}{m}\right) \xi_{s_3}(p) \end{pmatrix} =: \langle \vec{x}, t \,|p, 1/2, s_3\rangle$$

Zu jedem festen $\vec{p}$ gibt es vier linear unabhängige Lösungen, gekennzeichnet durch $p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, $s_3 = \pm 1/2$. Sie bilden eine Basis für die Lösungen der Diracgleichung. Um ξ_{s_3} zu definieren, gehen wir ins Ruhesystem $\vec{p} = 0$. Dann ist

$$\psi(me_0) = \begin{pmatrix} \xi(me_0) \\ \xi(me_0) \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Diracgleichung im Impulsraum und wir haben im Ruhesystem eine Spinbasis χ_{s_3} gegeben durch

$$\begin{aligned} \chi_{1/2} &= \xi_{1/2}(me_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \chi_{-1/2} &= \xi_{-1/2}(me_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wegen

$$(\gamma(p) - m)(\gamma(p) + m) = p^2 - m^2 = 0$$

ist für allgemeines p

$$\begin{aligned} \psi_{s_3}(p) &= N_p\,(\gamma(p) + m)\psi_{s_3}(me_0) = \\ &= N_p \begin{pmatrix} (m + \sigma(p))\, \xi_{s_3}(me_0) \\ (m + \tilde{\sigma}(p))\, \xi_{s_3}(me_0) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \xi_{s_3}(p) \\ \tilde{\sigma}\left(\frac{p}{m}\right) \xi_{s_3}(p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Lösung von $(\gamma(p) - m)\,\psi(p) = 0$.

Sei zunächst $p^0 > 0$, und sei $g_p \in SL(2,C)$ ein Boost, d.h. die zugehörige Lorentztransformation erfüllt $\Lambda_p\, me_0 = p$. Damit ist dann

$$\begin{aligned}(T_{g_p}\psi_{me_0,s_3})(x) &= e^{-i\langle me_0\,|\lambda_p^{-1}x\rangle} \begin{pmatrix} g_p & 0 \\ 0 & (g_p^+)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{s_3} \\ \chi_{s_3} \end{pmatrix} = \\ &= e^{-ipx} \begin{pmatrix} g_p\chi_{s_3} \\ (g_p^+)^{-1}\chi_{s_3} \end{pmatrix} = \\ &= e^{-ipx}\,\psi_{s_3}(p) = \psi_{p,s_3}(x)\end{aligned}$$

auch eine Lösung von $(\gamma(p) - m)\,\psi(p) = 0$, so daß wir sie versuchsweise gleich der obigen Lösung gesetzt haben. Die Normierungskonstanten N_p ist dann oben so zu wählen, daß $g_p \in SL(2,C)$, d.h. $\det g_p = 1$. Durch explizites Ausrechnen erhalten wir

$$N_p = (\det(m + \sigma(p)))^{-1/2} = (2m(m + p^0))^{-1/2}$$

und somit

$$g_p = \sqrt{\frac{m}{2(m+p^0)}}\left(1 + \frac{\sigma(p)}{m}\right)$$

Wir quadrieren zur Probe und erhalten

$$g_p^2 = \sigma\left(\frac{p}{m}\right)$$

Somit ist also

$$g_p = \sigma\left(\frac{p}{m}\right)^{1/2}$$

Dieses Ergebnis hatten wir auch früher schon erhalten [Petry]. Um den Fall $p^0 < 0$ einzuschließen, können wir

$$N_p = (2m\,|m + p^0|)^{-1/2}$$

wählen. Für $p^0 < 0$ ist dann allerdings $\det g_p = -1$, so daß $g_p \notin SL(2,C)$ ist.

Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall $p^0 > 0$. Da g_p hermitesch ist, muß dadurch auch ein Boost dargestellt werden, da für Drehungen ein unitärer Anteil nötig ist (vgl. unten). Wir haben also

$$\begin{aligned}\xi_{s_3}(p) &= g_p\,\chi_{s_3} \\ \psi_{p,s_3}(x) &= e^{-ipx} \begin{pmatrix} g_p\,\chi_{s_3} \\ g_p^{-1}\,\chi_{s_3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

denn es ist

$$\tilde{\sigma}\left(\frac{p}{m}\right)\sigma\left(\frac{p}{m}\right)^{1/2} = \tilde{\sigma}\left(\frac{p}{m}\right)\sigma\left(\frac{p}{m}\right)\sigma\left(\frac{p}{m}\right)^{-1/2} = \sigma\left(\frac{p}{m}\right)^{-1/2} = g_p^{-1}$$

Zur Illustration berechnen wir explizit Λ_p für einen Boost in z-Richtung

$$g_p = 1\,\cosh\frac{\phi}{2} + \sigma_3\,\sinh\frac{\phi}{2}$$

Wir hatten gezeigt [Petry], daß

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} \cosh\phi & 0 & 0 & \sinh\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\phi & 0 & 0 & \cosh\phi \end{pmatrix}$$

Durch Vergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} \cosh\frac{\phi}{2} &= \sqrt{\frac{m}{2(m+p^0)}}\left(1+\frac{p^0}{m}\right) \\ \sinh\frac{\phi}{2} &= \sqrt{\frac{m}{2(m+p^0)}}\,\frac{|\vec{p}|}{m} \\ \cosh\phi &= \cosh^2\frac{\phi}{2} + \sinh^2\frac{\phi}{2} = \\ &= \frac{p^0}{m} \\ \sinh\phi &= \sqrt{\cosh^2\phi - 1} = \frac{|\vec{p}|}{m} \end{aligned}$$

so daß $\Lambda_p\, m e_0 = p$ gilt.

Für die Normierung der Zustände $|p, 1/2, s_3\rangle$ erhalten wir

$$\langle p', 1/2, s_3' \,|p, 1/2, s_3\rangle = \int d^3x\, \psi^+_{p',s_3'}(x)\, \psi_{p,s_3} = (2\pi)^3\,\frac{2p^0}{m}\,\delta^3(\vec{p}-\vec{p'})\,\delta_{s_3',s_3}$$

mit $p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und $\mathrm{sign} p^0 = \mathrm{sign} p'^0$. Für $\mathrm{sign} p^0 \neq \mathrm{sign} p'^0$ ist

$$\langle p', 1/2, s_3' \,|p, 1/2, s_3\rangle = 0$$

Das Skalarprodukt war invariant unter der Poincaregruppe gewesen [Petry]. Umgekehrt bedeutet das, daß bei obiger Normierung der ebenen Wellen die

Poincaregruppe unitär dargestellt wird. Die Vollständigkeitsrelation lautet für $s = 1/2$ und $p^0 > 0$

$$1 = \sum_{s_3=\pm 1/2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{2p^0} \; |p, 1/2, s_3\rangle \langle p, 1/2, s_3|$$

Allgemeiner sei $|p, s, s_3\rangle$ ein Zustand zur Masse m mit Viererimpuls p (mit $p^0 > 0$), Spin s und z-Komponente des Spins s_3. Wir wollen nun eine Darstellung $T_{g,a}$, $g \in SL(2, C)$, , $a \in R^4$ der Überlagerungsgruppe der Poincaregruppe auf diesen Zuständen definieren, die konsistent ist mit der Darstellung für $s = 1/2$ ist, d.h. mit

$$(T_{g,a}\psi_{p,s_3})(x) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & (g^+)^{-1} \end{pmatrix} \psi_{p,s_3}(\Lambda^{-1}(x-a))$$

1.1 Translationen

Aus der oben angegebenen Darstellung für $s = 1/2$ liest man ab, daß

$$(T_a\psi_{p,s_3})(x) = \psi_{p,s_3}(x-a) == \psi_{p,s_3}(x)\, e^{ipa}$$

Für allgemeinen Spin definieren wir daher

$$T_a \; |p, s, s_3\rangle = e^{ipa} \; |p, s, s_3\rangle$$

1.2 Drehungen im Ruhesystem

Für Diracspinoren ist eine Darstellungen $T_u := T_{u,0}$ mit $u \in SU(2)$ im Ruhesystem des Teilchens gegeben durch

$$(T_u\psi_{me_0,s_3})(x) = e^{-imt} \begin{pmatrix} u\chi_{s_3} \\ u\chi_{s_3} \end{pmatrix} = \psi_{me_0,s_3'}(x)\, u_{s_3',s_3}$$

Dabei wurde verwendet, daß für eine komplexe 2×2-Matrix $A\, \chi_s = \chi_{s'}\, A_{s',s}$ gilt. Für allgemeinen Spin definieren wir daher

$$T_u \; |me_0, s, s_3\rangle = |me_0, s, s_3'\rangle \; D^s_{s_3',s_3}(u)$$

wobei $D^s_{s_3',s_3}(u) = \langle\, me_0, s, s_3' \;|\, T_u \,|\; me_0, s, s_3\,\rangle$ die üblichen Drehmatrizen sind. Insbesondere ist $u = D^{1/2}(u)$.

1.3 Boosts

Für $s = 1/2$ wurde ein Boost g_p dargestellt durch

$$(T_{g_p}\psi_{me_0,s_3})(x) = \psi_{p,s_3}(x)$$

und für allgemeinen Spin sei analog

$$T_{g_p}\ |me_0, s, s_3\rangle = |p, s, s_3\rangle$$

1.4 eigentliche Lorentztransformationen

Die obigen Definitionen legen nun $T_{g,a}$ bereits vollständig fest. Dazu beachten wir zunächst, daß sich jede Matrix $g' := g\, g_p \in SL(2,C)$ zerlegen läßt in

$$g\, g_p = g' = h\, u$$

mit einer hermitischen positiv definiten Matrix h mit Determinante 1, und einer Matrix $u \in SU(2)$, die von p und g abhängt. Es ist

$$\begin{aligned} h^2 &= h\, h^+ = h\, u\, u^+\, h^+ = g'\, g'^+ = \\ &= g\, g_p\, g_p^+\, g^+ = g\, \sigma\left(\frac{p}{m}\right)\, g^+ = \\ &= \sigma\left(\frac{\Lambda p}{m}\right) \end{aligned}$$

mit $\rho(g) = \Lambda$ [Petry]. Also ist

$$\begin{aligned} h &= \sigma\left(\frac{\Lambda p}{m}\right)^{1/2} = g_{\Lambda p} \\ g\, g_p &= g_{\Lambda p}\, u \end{aligned}$$

Dabei ist

$$u = g_{\Lambda p}^{-1}\, g\, g_p$$

ein Element der sogenannten *little group* der Poincaregruppe. Man kann sich das anschaulich so vorstellen, daß man die eigentliche Lorentztransformation

$$g = g_{\Lambda p}\, u\, g_p^{-1}$$

die p auf Λp abbildet, dadurch erhält, daß man erst mit g_p^{-1} ins Ruhesystem geht, dann mit u dreht und schließlich mit $g_{\Lambda p}$ boostet. Damit ist

$$\begin{aligned} T_g\ |p, s, s_3\rangle &= T_g\, T_{g_p}\ |me_0, s, s_3\rangle = \\ &= T_{g_{\Lambda p}}\, T_u\ |me_0, s, s_3\rangle = \\ &= T_{g_{\Lambda p}}\ |me_0, s, s_3'\rangle\ D^s_{s_3', s_3}(u) = \\ &= |\Lambda p, s, s_3'\rangle\ D^s_{s_3', s_3}(u) \end{aligned}$$

1.5 Parität P

Mit

$$\sigma\left(\frac{p}{m}\right) = \tilde{\sigma}\left(\frac{Pp}{m}\right) = \sigma\left(\frac{Pp}{m}\right)^{-1}$$

erhalten wir für die Darstellung der Parität auf den Diracspinoren

$$(T_P \psi_{p,s_3})(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi_{p,s_3}(Px) = \psi_{Pp,s_3}(x)$$

Für allgemeinen Spin sei daher

$$T_P \; |p, s, s_3\rangle = |Pp, s, s_3\rangle$$

Dies entspricht der klassischen Anschauung, nach der $\vec{p}$ ein polarer Vektor und der Spin ein axialer Vektor ist.

1.6 Zeitumkehr T

Wegen

$$\epsilon \, g_p^* = g_{-Tp} \, \epsilon$$

erhalten wir für die Darstellung der Zeitumkehr auf den Diracspinoren

$$(T_T \psi_{p,s_3})(x) = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \psi^*_{p,s_3}(Tx) = \psi_{-Tp,s_3'}(x) \, \epsilon_{s_3',s_3} = \psi_{-Tp,\,-s_3}(x) \, (-1)^{1/2-s_3}$$

mit

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für allgemeinen Spin sei daher

$$T_T \; |p, s, s_3\rangle = |-Tp, s, \, -s_3\rangle \; (-1)^{s-s_3}$$

Auch dies entspricht der klassischen Anschauung, nach der sich $\vec{p} \sim d\vec{x}/dt$ und auch $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ bei Zeitumkehr umdrehen.

Die Ladungsumkehr T_C wird unten im Zusammenhang mit der zweiten Quantisierung (Fockraum) besprochen.

2 Darstellung der Poincaregruppe auf dem Fockraum

In diesem Kapitel soll die Darstellung der Poincaregruppe auf dem Fockraum zu $s = 1/2$ untersucht werden. Die Bezeichnungen aus [Petry] werden dabei verwendet. Vergleiche dort auch das Kapitel zur zweiten Quantisierung.

Der Lösungsraum der Diracgleichung zerfällt in zwei zueinander orthogonale Räume von Lösungen mit $p^0 > 0$ und $p^0 < 0$:

$$\mathcal{H}_D = \mathcal{H}_D^+ \oplus \mathcal{H}_D^-$$

Sei $v = v_+ + v_- \ \in \mathcal{H}_D$ und

$$\Psi(v) = a(v_+) + a(v_-) = b(v_{el}) + d^+(v_{pos})$$

mit

$$\begin{aligned} v_{el} &= v_+ \\ T_C v_{pos} &= v_- \\ b(v_{el}) &= a(v_+) \\ d^+(v_{pos}) &= a(v_-) = a(T_C v_{pos}) \end{aligned}$$

Dabei ist T_C die Ladungsumkehr. Das Vakuum ist so definiert, daß $b\,|0\rangle = d\,|0\rangle = 0$ ist. Man beachte, daß a, b, d, T_C antilinear sind. Durch

$$\psi_{k,s_3,+} := \psi_{k,s_3}\Big|_{k^0=|k^0|}$$

ist eine 'kontinuierliche Basis' aus ebenen Wellen in $\mathcal{H}_+$ gegeben. In $\mathcal{H}_-$ ist eine entsprechende Basis dann gegeben durch

$$\psi_{k,s_3,-} := T_C\,\psi_{k,s_3,+}$$

Tatsächlich rechnet man leicht nach, daß

$$\left\langle \psi_{k',s_3',+} \,|\psi_{k,s_3,-}\right\rangle = 0$$

ist. Man beachte, daß

$$\psi_{k,s_3,-} \neq \psi_{k,s_3}\Big|_{k^0=-|k^0|}$$

Wie wir unten zeigen, gewährleistet diese spezielle Wahl der Basis in $\mathcal{H}_D^-$, daß k und s_3 ihre übliche Interpretation beibehalten bei den Erzeugern d^+_{k,s_3}.

Explizit lauten die Basiszustände in der *Weyl-Basis*

$$
\begin{aligned}
\psi_{k,s_3,+}(x) &= e^{-ikx} \begin{pmatrix} g_k\, \chi_{s_3} \\ \tilde{\sigma}\left(\frac{k}{m}\right) g_k\, \chi_{s_3} \end{pmatrix} \\
\psi_{k,s_3,-}(x) &= e^{ikx} \begin{pmatrix} g_k\, \epsilon\chi_{s_3} \\ -\tilde{\sigma}\left(\frac{k}{m}\right) g_k\, \epsilon\chi_{s_3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

wobei beides mal $k^0 = |k^0| > 0$ ist. Die Transformation in die meist übliche Standardbasis (Bjorken-Drell, Itzykson-Zuber) ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\psi_{\mathrm{std}} &= U\, \psi_{\mathrm{weyl}} \\
\gamma^\mu_{\mathrm{std}} &= U\, \gamma^\mu_{\mathrm{weyl}}\, U \\
U = U^+ = U^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

In der *Standardbasis* lauten die Basiszustände dann

$$
\begin{aligned}
\psi_{k,s_3,+}(x) &= e^{-ikx} \sqrt{\frac{m+k^0}{m}} \begin{pmatrix} \chi_{s_3} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{m+k^0}\, \chi_{s_3} \end{pmatrix} \\
\psi_{k,s_3,-}(x) &= e^{ikx} \sqrt{\frac{m+k^0}{m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{m+k^0}\, \epsilon\chi_{s_3} \\ \epsilon\chi_{s_3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(vergleiche auch **Nachtmann: Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik**). Die Basiszustände erfüllen beide die freie Diracgleichung.

Um die Transformationseigenschaften der Basiszustände zu berechnen, beweist man zunächst leicht

$$
\begin{aligned}
(T_g\, T_C\, \psi)(x) &= \hat{g}\, S(C)\, \psi^*(\Lambda^{-1}x) = S(C)\, \hat{g}^*\, \psi^*(\Lambda^{-1}x) = (T_C\, T_g\, \psi)(x) \\
(T_T\, T_C\, \psi)(x) &= S(T)\, S(C)\, \psi(Tx) = S(C)\, S(T)\, \psi(Tx) = (T_C\, T_T\, \psi)(x) \\
(T_P\, T_C\, \psi)(x) &= S(P)\, S(C)\, \psi^*(Px) = -S(C)\, S(P)\, \psi^*(Px) = -(T_C\, T_P\, \psi)(x)
\end{aligned}
$$

und erhalten damit

$$
\begin{aligned}
T_g\, \psi_{k,s_3,-} &= T_g\, T_C\, \psi_{k,s_3,+} = T_C\, T_g\, \psi_{k,s_3,+} = T_C\, \psi_{\Lambda k,s_3',+}\, u_{s_3',s_3} \\
&= (T_C\, \psi_{\Lambda k,s_3',+})\, u^*_{s_3',s_3} = \psi_{\Lambda k,s_3',-}\, u^*_{s_3',s_3}
\end{aligned}
$$

Analog berechnet man die übrigen Transformationseigenschaften. Wir fassen sie hier zusammen:

$$
(T_g \psi_{k,s_3,+})(x) = \psi_{\Lambda k,s_3',+}(x)\, u_{s_3',s_3}
$$

$$
\begin{aligned}
(T_g \psi_{k,s_3,-})(x) &= \psi_{\Lambda k, s_3', -}(x)\, u^*_{s_3', s_3} \\
(T_T \psi_{k,s_3,+})(x) &= \psi_{-Tk, -s_3, +}(x)\, (-1)^{1/2 - s_3} \\
(T_T \psi_{k,s_3,-})(x) &= \psi_{-Tk, -s_3, -}(x)\, (-1)^{1/2 - s_3} \\
(T_P \psi_{k,s_3,+})(x) &= \psi_{Pk, s_3, +}(x) \\
(T_P \psi_{k,s_3,-})(x) &= -\psi_{Pk, s_3, -}(x)
\end{aligned}
$$

Wir setzen

$$
\begin{aligned}
b_{k,s_3} &:= b(\psi_{k,s_3,+}) = a(\psi_{k,s_3,+}) \\
d^+_{k,s_3} &:= d^+(\psi_{k,s_3,+}) = a(C\psi_{k,s_3,+}) = a(\psi_{k,s_3,-})
\end{aligned}
$$

so daß die üblichen Antivertauschungsregeln gelten:

$$
\begin{aligned}
\{b_{k', s_3'},\, b^+_{k,s_3}\} &= (2\pi)^3\, \frac{2k^0}{m}\, \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')\, \delta_{s_3', s_3} \\
\{d_{k', s_3'},\, d^+_{k,s_3}\} &= (2\pi)^3\, \frac{2k^0}{m}\, \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')\, \delta_{s_3', s_3}
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\Psi(v) = \sum_{s_3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{2k^0}\, \left(\langle \psi_{k,s_3,+} \,| v_+ \rangle^*\, b_{k,s_3} + \langle \psi_{k,s_3,-} \,| v_- \rangle^*\, d^+_{k,s_3} \right)
$$

Definiere

$$
\Psi(v) =: \int d^3x\, v^+(x) \Psi(x)
$$

wobei diese Gleichung im Distributionensinn zu lesen ist. Die Zeit t liege dabei fest. Mit Hilfe dieser Definition kann man schreiben

$$
\Psi(x) = \sum_{s_3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{2k^0}\, \left(\psi_{k,s_3,+}(x)\, b_{k,s_3} + \psi_{k,s_3,-}(x)\, d^+_{k,s_3} \right)
$$

2.1 eigentliche Lorenztransformationen

Wir hatten $(T_g v)(x) = \hat{g}\, v(\Lambda^{-1} x)$, vergleiche oben. Wir definieren einen linearen Operator U_g auf dem Fockraum durch

$$
\begin{aligned}
\Psi(T_g v) &=: U_g\, \Psi(v)\, U_g^{-1} \\
\Leftrightarrow \quad \hat{g}^{-1}\, \Psi(\Lambda x) &= U_g\, \Psi(x)\, U_g^{-1}
\end{aligned}
$$

Durch Entwickeln nach ebenen Wellen erhalten wir einerseits

$$
U_g\, \Psi(x)\, U_g^{-1} = \sum_{s_3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{2k^0}\, \left(\psi_{k,s_3,+}(x)\, U_g\, b_{k,s_3}\, U_g^{-1} + \psi_{k,s_3,-}(x)\, U_g\, d^+_{k,s_3}\, U_g^{-1} \right)
$$

Andererseits muß dieser Ausdruck wegen der Transformationseigenschaften der Basiszustände gleich sein mit

$$\begin{aligned}
\hat{g}^{-1}\,\Psi(\Lambda x) &= \sum_{s_3,\,s_3'} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{m}{2k'^0}\,\left(\psi_{\Lambda^{-1}k',s_3,+}(x)\,u^{-1}_{s_3,s_3'}\;b_{k',s_3'} + \psi_{\Lambda^{-1}k',s_3,-}(x)\,(u^{-1}_{s_3,s_3'})^*\;d^+_{k',s_3'}\right) = \\
&= \sum_{s_3,\,s_3'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{2k^0}\,\left(\psi_{k,s_3,+}(x)\,u^{-1}_{s_3,s_3'}\;b_{\Lambda k,s_3'} + \psi_{k,s_3,-}(x)\,(u^{-1}_{s_3,s_3'})^*\;d^+_{\Lambda k,s_3'}\right)
\end{aligned}$$

mit $\Lambda^{-1}k' = k$. Durch Vergleichen erhalten wir wegen $u^{-1}_{i,j} = u^*_{j,i}$

$$\begin{aligned}
U_g\,b_{k,s_3}\,U_g^{-1} &= b_{\Lambda k,s_3'}\,u^*_{s_3',s_3} \\
U_g\,b^+_{k,s_3}\,U_g^{-1} &= b^+_{\Lambda k,s_3'}\,u_{s_3',s_3} \\
U_g\,d_{k,s_3}\,U_g^{-1} &= d_{\Lambda k,s_3'}\,u^*_{s_3',s_3} \\
U_g\,d^+_{k,s_3}\,U_g^{-1} &= d^+_{\Lambda k,s_3'}\,u_{s_3',s_3}
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Rechnungen für C, P, T verlaufen analog. Im Fockraum sind Teilchen- und Antiteilchenzustände gegeben durch

$$\begin{aligned}
|e,k,1/2,s_3\rangle &:= b^+_{k,s_3}\,|0\rangle \\
|\bar{e},k,1/2,s_3\rangle &:= d^+_{k,s_3}\,|0\rangle
\end{aligned}$$

und es gelten demnach für sie die Transformationseigenschaften

$$\begin{aligned}
U_g\;|e,k,1/2,s_3\rangle &= |e,\Lambda k,1/2,s_3'\rangle\;u_{s_3',s_3} \\
U_g\;|\bar{e},k,1/2,s_3\rangle &= |\bar{e},\Lambda k,1/2,s_3'\rangle\;u_{s_3',s_3}
\end{aligned}$$

Es gilt also für Einteilchenzustände $T_g = U_g$. Damit besitzt k in beiden Fällen die Bedeutung eines Impulses und s_3 gibt die z-Komponente des Spins an.

2.2 Parität P

Es ist $(T_P v)(x) = S(P)\,v(Px)$. Wir definieren einen unitären Operator U_P auf dem Fockraum durch

$$\begin{aligned}
\Psi(T_P v) &=: U_P\,\Psi(v)\,U_P^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad S(P)\,\Psi(Px) &= U_P\,\Psi(x)\,U_P^{-1}
\end{aligned}$$

Durch

$$\psi_{Pk,s_3,\pm} = T_P\,\psi_{k,s_3,\pm}$$

ist eine weitere Basis gegeben. Damit erhalten wir unter der Verwendung der Entwicklung nach den Basisfunktionen

$$\begin{aligned} b_{Pk,s_3} &= U_P\, b_{k,s_3}\, U_P^{-1} \\ -d^+_{Pk,s_3} &= U_P\, d^+_{k,s_3}\, U_P^{-1} \\ U_P\, |e,k,1/2,s_3\rangle &= |e,Pk,1/2,s_3\rangle \\ U_P\, |\bar{e},k,1/2,s_3\rangle &= -\,|\bar{e},Pk,1/2,s_3\rangle \end{aligned}$$

2.3 Zeitumkehr T

Es ist $(T_T v)(x) = S(T)\, v^*(Tx)$. Wir definieren einen Operator U_T auf dem Fockraum durch

$$\begin{aligned} \Psi(T_T v) &=: U_T\, \Psi(v)\, U_T^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad -S(T)\, \Psi(Tx) &= U_T\, \Psi(x)\, U_T^{-1} \end{aligned}$$

wobei wir zusätzlich fordern, daß U_T *antilinear* sein soll. Man beachte, daß kein Ψ^+ in der Definition vorkommt, da sonst Teilchen in Antiteilchen umgewandelt würden. Damit erhalten wir unter der Verwendung der Entwicklung nach den alten und neuen Basisfunktionen

$$\begin{aligned} b_{-Tk,-s_3}\,(-1)^{1/2-s_3} &= U_T\, b_{k,s_3}\, U_T^{-1} \\ d^+_{-Tk,-s_3}\,(-1)^{1/2-s_3} &= U_T\, d^+_{k,s_3}\, U_T^{-1} \\ U_T\, |e,k,1/2,s_3\rangle &= |e,-Tk,1/2,-s_3\rangle\ (-1)^{1/2-s_3} \\ U_T\, |\bar{e},k,1/2,s_3\rangle &= |\bar{e},-Tk,1/2,-s_3\rangle\ (-1)^{1/2-s_3} \end{aligned}$$

2.4 Ladungskonjugation C

Es ist $(T_C v)(x) = S(C)\, v^*(x)$. Wir definieren einen linearen Operator U_C auf dem Fockraum durch

$$\begin{aligned} \Psi(T_C v)^+ &=: U_C\, \Psi(v)\, U_C^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad S(C)\, \Psi^+(x) &= U_C\, \Psi(x)\, U_C^{-1} \end{aligned}$$

Diese Definition bewirkt die Umwandlung von Teilchen in Antiteilchen durch U_C. Man erhält durch Entwickeln nach den Basisfunktionen

$$\begin{aligned} b^+_{k,s_3} &= U_C\, d^+_{k,s_3}\, U_C^{-1} \\ d_{k,s_3} &= U_C\, b_{k,s_3}\, U_C^{-1} \\ U_C\, |\bar{e},k,1/2,s_3\rangle &= |e,k,1/2,s_3\rangle \end{aligned}$$

3 Die S-Matrix im Wechselwirkungsbild

Dieses Kapitel ist teilweise angelehnt an *Schweber: An Introduction to relativistic Quantum Field Theory.* Wir betrachten allgemein Zustände eines Hilbertraums, deren Zeitentwicklung gegeben ist durch

$$\begin{aligned} |\psi_s(t)\rangle &= \hat{U}(t-t_0)\ |\psi_s(t_0)\rangle \\ \hat{U}(t-t_0) &= e^{-iH(t-t_0)} \end{aligned}$$

Der Index s gibt an, daß wir diese Beschreibung der Zeitentwicklung durch zeitabhängige Zustände als *Schrödingerbild* bezeichnen. Wir teilen nun im Sinne der Störungstheorie H auf in einen freien Teil H^0 und einen Wechselwirkungsteil H^I. Analog zu oben ist die Zeitentwicklung ohne den Wechselwirkungsanteil gegeben durch

$$\tilde{U}(t-t_0) = e^{-iH^0(t-t_0)}$$

3.1 Das Wechselwirkungsbild

Man kann nun die Zeitentwicklung, die durch H^0 verursacht wird, von den Zuständen auf die Operatoren herüberbringen. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &:=: \tilde{U}^{-1}(t)\ |\psi_s(t)\rangle \\ A_t &:= \tilde{U}^{-1}(t)\, A\, \tilde{U}(t) \quad \text{, insbesondere:} \\ H^I_t &:= \tilde{U}^{-1}(t)\, H^I\, \tilde{U}(t) \end{aligned}$$

Man beachte, daß $H^0_t = H^0$ ist. Man sagt, daß man sich im *Diracbild* oder *Wechselwirkungsbild* befindet, wenn man eine Theorie mit den so definierten Zuständen (ohne den Schrödingerindex s) und zeitabhängigen Operatoren (mit dem Zeitindex t) formuliert. Es gilt

$$\langle\ \psi(t)\ |\, A_t\, |\ \phi(t)\ \rangle = \langle\ \psi_s(t)\ |\, A\, |\ \phi_s(t)\ \rangle$$

Die Definition wurde so gewählt, daß Schrödingerbild und Wechselwirkungsbild für $t = 0$ übereinstimmen. Die Zeitentwicklung der Zustände im Wechselwirkungsbild ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= U(t,t_0)\ |\psi(t_0)\rangle \\ U(t,t_0) &:= \tilde{U}^{-1}(t)\, \hat{U}(t-t_0)\, \tilde{U}(t_0) = \\ &= e^{iH^0 t}\, e^{-iH(t-t_0)}\, e^{-iH^0 t} \end{aligned}$$

Es gilt die Eigenschaft

$$\begin{aligned} U(t,t_0)\, U(t_0,t') &= U(t,t') \\ U(t,t_0)^{-1} &= U(t_0,t) = U^+(t,t_0) \end{aligned}$$

3.2 Die S-Matrix

Wir wollen nun einen Streuprozess beschreiben. Sei dazu $|\psi(t)\rangle$ ein Zustand, der sich für große positive und negative Zeiten außerhalb der Wechselwirkungszone befindet und dort also im Diracbild unabhängig von t wird. Wir definieren also zeitlich konstante Zustände mit Träger außerhalb der Wechselwirkungszone durch

$$\begin{aligned} |\phi_a\rangle &:= \lim_{t\to-\infty} |\psi_a(t)\rangle \\ |\phi_f\rangle &:= \lim_{t\to\infty} |\psi_a(t)\rangle \end{aligned}$$

Im Experiment präpariert man nun einen freien einlaufenden Zustand $|\phi_a\rangle$ und läst ihn in die Wechselwirkungszone laufen. Nachdem er diese Zone wieder verlassen hat (sich also wie $|\psi_a(t)\rangle$ zeitlich entwickelt hat), liegt nun ein anderer freier Zustand $|\phi_f\rangle$ vor. An diesem Zustand wird nun eine Messung durchgeführt, d.h. eine Quantenzahl b soll gemessen werden. Man mißt also die Projektion auf einen Zustand $|\phi_b\rangle$, der Eigenzustand zu dieser Quantenzahl ist. Diese Projektion wird *S-Matrixelement* zu dieser Messung genannt. Wir definieren daher

$$\begin{aligned} S_{ba} &:= \langle \phi_b \,|\phi_f\rangle = \\ &= \lim_{t_2\to\infty} \langle \phi_b \,|\psi_a(t_2)\rangle = \\ &= \lim_{t_2\to\infty} \langle\, \phi_b \,|\, U(t_2,t_1) \,|\, \psi_a(t_1)\,\rangle = \\ &= \lim_{t_2\to\infty} \lim_{t_1\to-\infty} \langle\, \phi_b \,|\, U(t_2,t_1) \,|\, \phi_a\,\rangle \end{aligned}$$

Man definiert daher auch häufig den *S-Operator* als

$$S = U(\infty, -\infty)$$

3.3 Mølleroperatoren

Man kann sich den Zustand $|\phi_b\rangle$ auch vorstellen als den Grenzwert $t \to \infty$ von einem Zustand $|\psi_b(t)\rangle$, der aus der Wechselwirkungszone ausläuft:

$$|\phi_b\rangle = \lim_{t\to\infty} |\psi_b(t)\rangle$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} |\psi_a(t)\rangle &= U(t,-\infty)\; |\phi_a\rangle \\ |\psi_b(t)\rangle &= U(t,\infty)\; |\phi_b\rangle \end{aligned}$$

Für die S-Matrix gilt also

$$
\begin{aligned}
S_{ba} &= \langle\, \phi_b \,|\, U(\infty, -\infty) \,|\, \phi_a \,\rangle = \\
&= \langle\, \phi_b \,|\, U(\infty, t)\, U(t, -\infty) \,|\, \phi_a \,\rangle = \\
&= \langle \psi_b(t) \,| \psi_a(t) \rangle
\end{aligned}
$$

Wir wählen $t = 0$ und definieren die *Mølleroperatoren* $\Omega_\pm$

$$
\begin{aligned}
\Omega_\pm &:= U(0, \mp\infty) \\
\Omega_+ \, |\phi_a\rangle &= |\psi_a(0)\rangle \\
\Omega_- \, |\phi_b\rangle &= |\psi_b(0)\rangle
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir für den S-Operator

$$
\begin{aligned}
S_{ba} &= \langle \psi_b(0) \,| \psi_a(0) \rangle = \\
&= \left\langle\, \phi_b \,\middle|\, \Omega_-^+ \, \Omega_+ \,\middle|\, \phi_a \,\right\rangle \\
\Rightarrow \quad S &= \Omega_-^+ \, \Omega_+
\end{aligned}
$$

Das Problem gebundener Zustände von H soll hier nicht untersucht werden.

3.4 Die Reduktionsformel für zeitgeordnete Produkte von Diracfeldern

Zunächst definieren wir Operatoren $\Psi(t, \vec{x})$ für Diracteilchen im *Heisenbergbild* durch

$$
\begin{aligned}
\Psi(t, \vec{x}) &:= \hat{U}^{-1}(t)\, \Psi_s(\vec{x})\, \hat{U}(t) = \\
&= \hat{U}^{-1}(t)\, \tilde{U}(t)\, \Psi_t(\vec{x})\, \tilde{U}^{-1}(t)\, \hat{U}(t) = \\
&= U^{-1}(t, 0)\, \Psi_t(\vec{x})\, U(t, 0)
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\Psi_s(\vec{x})$ der zeitunabhängige Operator im Schrödingerbild und $\Psi_t(\vec{x})$ der zeitabhängige Operator im Wechselwirkungsbild. Wegen

$$
\Psi_t(\vec{x}) = \tilde{U}^{-1}(t)\, \Psi_0(\vec{x})\, \tilde{U}(t)
$$

ist $\Psi_t(\vec{x})$ gleich dem freien Feldoperator im Heisenbergbild

$$
\Psi_t(\vec{x}) =: \Psi_{fr}(x)
$$

mit $x = (t, \vec{x})$. Aus den obigen Gleichungen folgt sofort

$$
\begin{aligned}
\lim_{t \to \pm\infty} \Omega_\mp^+ \, \Psi(x) &= \lim_{t \to \pm\infty} \Psi_{fr}(x)\, \Omega_\mp^+ \\
\lim_{t \to \pm\infty} \Psi(x)\, \Omega_\mp &= \lim_{t \to \pm\infty} \Omega_\mp \, \Psi_{fr}(x)
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun das Matrixelement

$$\begin{aligned}&\langle\,(\psi_b)_s(t)\;|\,T\,\Psi_s(\vec{x}_1)\cdots\Psi_s(\vec{x}_n)\,|\;(\psi_a)_s(t)\,\rangle =\\ &= \;\langle\,\psi_b(0)\;|\,T\,\Psi(t_1,\vec{x}_1)\cdots\Psi(t_n,\vec{x}_n)\,|\;\psi_a(0)\,\rangle\end{aligned}$$

Dabei haben wir links die Formulierung im Schrödingerbild angegeben und rechts im Heisenbergbild. T ist der Zeitordnungsoperator, der bewirkt, daß Operatoren in abfallender zeitlicher Reihenfolge anzuordnen sind. Unser Ziel ist es nun, dieses Matrixelement durch freie ein- und auslaufende Zustände sowie freie Feldoperatoren auszudrücken. Dabei wird die S-Matrix auftauchen, die man selber wieder nach freien Feldoperatoren entwickeln kann. Wir erhalten so einen störungstheoretischen Ausdruck für das Matrixelement. Zunächst wollen wir eine formalen Ausdruck für $U(t,t_0)$ angeben [Schweber]: Wegen

$$i\frac{d}{dt}\,U(t,t_0) = H^I_t\,U(t,t_0)$$

gilt für U die formale Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}U(t,t_0) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,(-i)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\,\cdots\int_{t_0}^{t}dt_n\;T\;H^I_{t_1}\,H^I_{t_2}\,\cdots\,H^I_{t_n} =\\ &=:\; T\,\exp\left(-i\int_{t_0}^{t}dt'\;H^I_{t'}\right)\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck wollen wir unten benutzen. Dabei sei vorausgesetzt, daß H^I_t nur Terme mit einer geraden Anzahl von Ψ_{fr}-Feldern enthält, d.h. es gilt für $t_1\neq t_2$

$$T\,\Psi_{fr}(t_1,\vec{x})\,H^I_{t_2} = T\,H^I_{t_2}\,\Psi_{fr}(t_1,\vec{x})$$

Damit erhalten wir die Reduktionsformel

$$\begin{aligned}&\langle\,\psi_b(0)\;|\,T\,\Psi(x_1)\cdots\Psi(t_n,\vec{x}_n)\,|\;\psi_a(0)\,\rangle =\\ &=\;\langle\phi_b|\,U(\infty,0)\;T\;[\,U(0,t_1)\,\Psi_{fr}(x_1)\,U(t_1,0)\\ &\qquad\cdots\,U(0,t_n)\,\Psi_{fr}(x_n)\,U(t_n,0)\,]\;U(0,-\infty)\,|\phi_a\rangle =\\ &=\;\langle\phi_b|\,T\;[\,U(\infty,t_1)\,\Psi_{fr}(x_1)\,U(t_1,t_2)\,\Psi_{fr}(x_2)\\ &\qquad\cdots\,U(t_{n-1},t_n)\,\Psi_{fr}(x_n)\,U(t_n,-\infty)\,]\,|\phi_a\rangle =\\ &=\;\langle\,\phi_b\,|\,T\;[\,\Psi_{fr}(x_1)\,\Psi_{fr}(x_2)\,\cdots\,\Psi_{fr}(x_n)\;S\,]\;|\;\phi_a\,\rangle =\\ &=\;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,(-i)^n\int_{t_0}^{t}dt'_1\int_{t_0}^{t}dt'_2\,\cdots\int_{t_0}^{t}dt'_n\\ &\qquad\Big\langle\,\phi_b\,\Big|\,T\;[\,\Psi_{fr}(x_1)\,\Psi_{fr}(x_2)\,\cdots\,\Psi_{fr}(x_n)\;H^I_{t'_1}\,H^I_{t'_2}\,\cdots\,H^I_{t'_n}\,]\;\Big|\;\phi_a\,\Big\rangle\end{aligned}$$

Der T-Operator wirkt dabei auf den gesamten Ausdruck und sorgt für die richtige Anordnung der Operatoren. Konkret ist H^I_t ein Ausdruck mit einer geraden Anzahl von *freien* Feldern $\Psi_{fr}(x)$, den man nun in diese Reihenentwicklung einsetzen kann. Die entstehenden Terme lassen sich nun mit Hilfe des *Wick-Theorems* auswerten und im Wesentlichen durch freie Propagatoren

$$\langle\, 0 \,|\, T\, \Psi_{fr}(x)\, \Psi_{fr}(y) \,|\, 0 \,\rangle$$

ausdrücken, was letztlich auf die Feynmanregeln führt.

4 Gapgleichung und chirale Symmetriebrechung

In diesem Kapitel werden mit Hilfe einer einfachen Modell-Lagrangedichte die Konzepte dargestellt, mit deren Hilfe man z.B. im sogenannten *Nambu-Jona-Lasinio-Modell* die spontane Brechung der chiralen Symmetrie in der QCD und damit die dynamische Erzeugung von Quarkmassen behandeln kann.

Die sogenannten Strommassen der leichten Quarks (u,d) liegen um ein bis zwei Größenordnungen unter den Massen der leichten Hadronen. Man nimmt daher an, daß man zur Beschreibung der leichten Hadronen (aus u- und d-Quarks aufgebaut) die entsprechenden Massenterme in der QCD-Lagrangedichte in guter Näherung vernachlässigen kann. In diesem Fall weist die genäherte Lagrangedichte einige zusätzliche Invarianzen im Flavorraum auf. Beschränken wir uns auf die zwei leichtesten Quarkflavors, so können rechts- und linkshändige Quarkfelder unabhängig voneinander im Flavorraum mit einer Matrix $U \in U(2)$ rotiert werden.

Um die Konsequenzen dieser Symmetrien zu verstehen, beschränken wir uns in einem ersten einfachen Modell auf einen Flavor und betrachten eine einfache Lagrangedichte, die keine Massenterme enthält und die invariant ist unter der chiralen Transformation

$$\psi_L \to \lambda \psi_L \quad , \quad \psi_R \to \lambda^{-1} \psi_R$$

wobei $\lambda \in C,\ |\lambda| = 1$ ist. Die einfachste Lagrangedichte mit Wechselwirkung und den obigen Eigenschaften ist

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + g\left[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2\right]$$

Die übliche Vorgehensweise ist nun häufig, den zweiten Anteil als Wechselwirkungsanteil in Störungstheorie zu behandeln, so daß die Lagrangedichte ohne diesen Störterm einfach masselose Diracteilchen beschreibt. Man stellt Feynmanregeln mit masselosen Diracpropagatoren auf und erhält so auch Selbstwechselwirkungsgraphen für die Fermionen, die auf eine (divergierende) Selbstenergie (und somit Masse) führen können. Der Nachteil bei dieser Methode ist, daß nichtstörungstheoretische Effekte durch die Wechselwirkung so nur schwer behandelt werden können, z.B. mit Hilfe von Dyson-Schwinger-Gleichungen.

Eine andere Vorgehensweise besteht darin, die obige Lagrangedichte mit den Methoden der Vielteilchentheorie (Hartree-Fock) zu behandeln und dabei einen möglichst großen Teil der Wechselwirkung ohne Störungstheorie zu berücksichtigen. Dazu ist zu beachten, daß die obige Lagrangedichte noch nicht normalgeordnet ist, was bei der vorher beschriebenen Methode (Störungstheorie) z.B. zu sogenannten Tadpole-Feynmangraphen führt. Die Definition des Normalordnens bezieht sich immer auf einen Grundzustand (Vakuum). Das exakte Vakuum (mit Wechselwirkung) ist dadurch definiert, daß der Erwartungswert der Hamiltondichte für diesen Zustand minimal wird. Bei der Konstruktion dieses Zustandes ist man jedoch meist auf Näherungsverfahren angewiesen. Das oben beschriebenen Verfahren (Störungstheorie zu $m = 0$) definiert das Vakuum dadurch, daß man die Lagrangedichte ohne Wechselwirkung als gute Näherung betrachtet. Die entsprechende Näherung für das Vakuum ist dann der Zustand, der den Erwartungswert der freien Hamiltondichte (ohne WW) minimiert. Das ist der Diracsee, bei dem alle Fermionzustände (Masse Null) mit negativer Energie besetzt sind. Falls die Kopplungskonstante jedoch zu groß wird, ist dieses Verfahren nicht mehr sehr geeignet. Man wird eine bessere Näherung für den Grundzustand mit Wechselwirkung erreichen, wenn man ihn als Diracsee von Fermionen mit beliebiger Masse ansetzt. Dieser Ansatz für das Vakuum als Diracsee freier Teilchen zur Masse m entspricht einem Hartree-Fock-Ansatz in der Vielteilchentheorie. Die Masse spielt dabei die Rolle eines Variationsparameters. Entsprechend entwickelt man auch die Feldoperatoren $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ nach Erzeugern und Vernichtern zu dieser Masse statt zur Masse Null und baut damit den Fockraum zu diesem Vakuum auf. Man beachte, daß man wegen Vollständigkeit die Feldoperatoren nach Erzeugern und Vernichtern zu beliebiger Masse entwickeln kann, da damit immer die richtigen Antivertauschungsrelationen für $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ gewährleistet sind. Die geeignete Masse wird dann so bestimmt, daß der Erwartungswert der Hamiltondichte (mit WW) minimal wird (Ritzsches Variationsverfahren). Dieses Verfahren steht in Analogie zu Hartree-Fock-Verfahren, vgl. *Ring, Schuck: The Nuclear Many Body Problem, Kap.7.* Von dort kann man übernehmen, daß man äquivalent zum Minimieren des Energie-Erwartungswertes auch die Lagrangedichte bezüglich des Vakuums normalordnen kann und den Massenterm direkt abliest. Dies werden wir in Folgenden durchführen.

Für das Normalordnen verwenden wir das *Wick-Theorem* und schreiben nacheinander alle Terme explizit mit Dirac-Indices auf. Da wir das Vakuum als Diracsee (zur Masse m) angesetzt haben, ist

$$\langle 0 \mid \psi_\alpha \psi_\beta \mid 0 \rangle = \left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}_\alpha \bar{\psi}_\beta \,\middle|\, 0 \right\rangle = 0$$

wobei α, β Diracindices sind. Weiter setzen wir die Lorentzinvarianz des Vakuums voraus, d.h.

$$U \left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle$$

wobei U die Darstellung der Lorentztransformation Λ auf dem Fockraum ist, also

$$\begin{aligned} U^+\psi(x)U &= S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x) \\ U^+\bar{\psi(x)}U &= \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\,S^{-1}(\Lambda) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho_{\beta\alpha} &:= \left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}_\alpha(0)\psi_\beta(0) \,\middle|\, 0 \right\rangle = \\ &= \left\langle 0 \,\middle|\, U^+\bar{\psi}_\alpha(0)U\; U^+\psi_\beta(0)U \,\middle|\, 0 \right\rangle = \\ &= \left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}_{\alpha'}(0)\,S^{-1}_{\alpha'\alpha}\;S_{\beta'\beta}\,\psi_{\beta'}(0) \,\middle|\, 0 \right\rangle = \\ &= S_{\beta\beta'}\,\rho_{\beta'\alpha'}\,S^{-1}_{\alpha'\alpha} \end{aligned}$$

wobei wir wegen Translationsinvarianz des Vakuums ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x = 0$ gesetzt haben. Analog definieren wir

$$\rho'_{\alpha\beta} := \left\langle 0 \,\middle|\, \psi_\alpha(0)\bar{\psi}_\beta(0) \,\middle|\, 0 \right\rangle$$

und die Rechnung ist analog. Man beachte die unterschiedlichen Indexstellungen bei ρ und ρ'. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \rho &= S\rho S^{-1} \\ \rho' &= S\rho' S^{-1} \end{aligned}$$

Die Matrizen ρ, ρ' lassen sich nach den Matrizen der Dirac-Algebra entwickeln, da diese eine Basis über den komplexen Zahlen für invertierbare 4×4-Matrizen bilden. Die einzige Basismatrix mit der obigen Eigenschaft ist 1. Daher ist

$$\begin{aligned} \rho = c\,1 \quad &\Rightarrow \quad c = tr\,\rho/4 = \left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}\psi \,\middle|\, 0 \right\rangle/4 \\ \rho' = c'\,1 \quad &\Rightarrow \quad c' = tr\,\rho'/4 = -\left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}\psi \,\middle|\, 0 \right\rangle/4 \end{aligned}$$

Das negative Vorzeichen kann man durch explizite Berechnung der Erwartungswerte ablesen. Diese Berechnung werden wir für $\left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}\psi \,\middle|\, 0 \right\rangle$ noch durchführen. Wir haben also

$$\begin{aligned} \left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}_\alpha\psi_\beta \,\middle|\, 0 \right\rangle &= \left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}\psi \,\middle|\, 0 \right\rangle/4\;\delta_{\alpha\beta} \\ \left\langle 0 \,\middle|\, \psi_\alpha\bar{\psi}_\beta \,\middle|\, 0 \right\rangle &= -\left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}\psi \,\middle|\, 0 \right\rangle/4\;\delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Beziehungen und des Wick-Theorems erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \;:i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi: + 2g\left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}\psi \,\middle|\, 0 \right\rangle :\bar{\psi}\psi: + \\ &+ \;g\;:((\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2): + \\ &+ \;i\left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \,\middle|\, 0 \right\rangle + g\left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}\psi \,\middle|\, 0 \right\rangle^2 \end{aligned}$$

Man sieht, daß ein Term analog zum üblichen Massenterm $-m\,:\bar{\psi}\psi:$ durch das Normalordnen entsteht. Wir setzen daher an:

$$m = -2g \left\langle 0 \left| \bar{\psi}\psi \right| 0 \right\rangle$$

Dies ist eine selbstkonsistente Gleichung (*Gapgleichung*) für m. Um das zu sehen, kann man $\psi(x)$ in der üblichen Weise in Fourierdarstellung nach Erzeugern und Vernichtern zur Masse m zerlegen und den Vakuumerwartungswert direkt berechnen. Äquivalent dazu kann man auch verwenden, daß für den freien Propagator zur Masse m gilt:

$$\begin{aligned} i\,S_{\alpha\beta}(x-y) &= \left\langle 0 \left| T\,\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) \right| 0 \right\rangle = \\ &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{\gamma p - m + i\epsilon} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{\Delta x \to 0} iS_{\alpha\beta}(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} iS_{\alpha\beta}(-\Delta x) = -\left\langle 0 \left| \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta \right| 0 \right\rangle$$

und wir erhalten unter Verwendung des expliziten Ausdrucks von $S(x-y)$ und des Residuensatzes die Formel

$$\left\langle 0 \left| \bar{\psi}\psi \right| 0 \right\rangle = -i\;tr\;S(0) = -2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^0}$$

Dieser Ausdruck divergiert. Daher ist es nötig, einen Cutoff-Parameter Λ einzuführen, der große Impulse abschneidet. Man interpretiert dies so, daß man eine effektive Lagrangedichte für das Niederenergieverhalten (kleine Impulse) der QCD konstruieren möchte, die sowieso für hohe Impulse keine Bedeutung mehr hat. Damit hängt auch zusammen, daß die obige Lagrangedichte sowieso nicht renormierbar ist. Die physikalische Bedeutung des Kondensats $\left\langle 0 \left| \bar{\psi}\psi \right| 0 \right\rangle$ ist nun klar: es repräsentiert die skalare Dichte des Diracsees (mit der Teilchenenergie $-\sqrt{m^2+\vec{p}^2}$), die bis zum Impuls Λ aufintegriert wird.

Nach Einführung des Cutoffs und Ausführung der Winkelintegration erhält man für die Gapgleichung

$$m = \frac{2gm}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp\, \frac{\vec{p}^2}{\sqrt{m^2+\vec{p}^2}}$$

Diese Gleichung kann man für vorgegebenes g und Λ für m lösen. Insbesondere ist $m = 0$ immer eine Lösung. Diese Lösung entspricht dem störungstheoretischen Fall, den wir oben besprochen haben. Für hinreichend große

Kopplung g ist jedoch auch $m > 0$ eine Lösung. Dafür berechnen wir das Integral analytisch und erhalten aus der Gapgleichung für $m \neq 0$ die Beziehung

$$\tilde{g} = \pi^2 \left(\sqrt{1+\tilde{m}^2} - \tilde{m}^2 \ln \frac{1+\sqrt{1+\tilde{m}^2}}{\tilde{m}} \right)^{-1}$$

mit dem dimensionslosen Größen $\tilde{g} = g\Lambda^2, \; \tilde{m} = m/\Lambda$. Diese Gleichung ist am Ende des Kapitels graphisch aufgetragen. Man erkennt, daß ab einer kritischen Kopplung

$$\tilde{g}_c = \pi^2$$

auch $m > 0$ eine Lösung der Gapgleichung ist. Wie wir später noch sehen werden, ergibt das Vakuum als Diracsee zu dieser Masse einen tieferen Energieerwartungswert als der Diracsee zur Masse $m = 0$ und ist daher eine bessere Näherung für den Grundzustand. Der Fockraum zur Masse $m > 0$ bildet für starke Kopplungen also einen besseren Ausgangsposition für die Störungstheorie, da hier ein Teil der Wechselwirkung bereits durch eine Masse (Selbst-WW) parametrisiert ist, analog zum mittleren Potential in der Hartree-Fock-Theorie.

Anmerkung: Die Gapgleichung kann man auch mit Hilfe der normalen Störungstheorie ($m = 0$) aus der Dyson-Schwinger-Gleichung mit einem Loop für die Selbstenergie erhalten.

Die beschriebene dynamische Erzeugung einer Masse durch die Wechselwirkung ist mit einer spontanen Brechung der chiralen Symmetrie verbunden. Betrachte dazu die chirale Transformation

$$\begin{aligned} \lambda\psi_L &=: U^+\psi_L U \\ \lambda^{-1}\psi_R &=: U^+\psi_R U \\ U\left|0\right\rangle &=: \left|0'\right\rangle \end{aligned}$$

wobei U der Lift der chiralen Transformation auf den Fockraum ist und $\lambda \in C, \; |\lambda| = 1$ ist. Man beachte, daß wir nicht die Invarianz des Vakuums unter U fordern. Damit ist

$$\begin{aligned} \left\langle 0' \,\middle|\, \bar{\psi}\psi \,\middle|\, 0' \right\rangle &= \left\langle 0' \,\middle|\, \psi_L^+\psi_R + \psi_R^+\psi_L \,\middle|\, 0' \right\rangle = \\ &= \left\langle 0 \,\middle|\, U^+\psi_L^+ U U^+\psi_R U + U^+\psi_R^+ U U^+\psi_L U \,\middle|\, 0 \right\rangle = \\ &= \left\langle 0 \,\middle|\, \lambda^{-2}\psi_L^+\psi_R + \lambda^2\psi_R^+\psi_L \,\middle|\, 0 \right\rangle \neq \\ &\neq \left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}\psi \,\middle|\, 0 \right\rangle \end{aligned}$$

wobei ja $\lambda^* = \lambda^{-1}$ ist. Wenn also $\left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}\psi \,\middle|\, 0 \right\rangle \neq 0$ ist, so muß

$$U\left|0\right\rangle = \left|0'\right\rangle \neq \left|0\right\rangle$$

sein, d.h. die chirale Symmetrie ist spontan gebrochen für $m > 0$. Der Vakuumzustand (d.h. in unserer Näherung der Diracsee massiver Fermionen) ist nicht mehr invariant unter chiralen Transformationen. Damit sind im Weiteren auch die üblichen Folgen wie das Auftreten von Goldstonebosonen verbunden.

Wir zeigen nun, daß man die Gapgleichung auch duch Minimieren des Vakuum-Energie-Erwartungswertes erhalten kann. Dieser Erwartungswert ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle\, 0 \mid \mathcal{H} \mid 0 \,\rangle &= \left\langle 0 \left| \bar{\psi}\vec{\gamma}\vec{p}\psi \right| 0 \right\rangle - g \left\langle 0 \left| \bar{\psi}\psi \right| 0 \right\rangle \\ &= -2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}^{\,2}}{p^0} - g \cdot \left(-2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^0} \right)^2 \end{aligned}$$

wie man unter Verwendung der Fourierdarstellung der Feldoperatoren ausrechnet. Nun liefert

$$\frac{\partial}{\partial m} \langle\, 0 \mid \mathcal{H} \mid 0 \,\rangle = 0$$

die Gapgleichung von oben. Die Berechnung der Integrale liefert außerdem die explizite Formel

$$\begin{aligned} \frac{\langle\, 0 \mid \mathcal{H} \mid 0 \,\rangle}{\Lambda^4} &= -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{1+\tilde{m}^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\tilde{m}^2\right) - \frac{3}{8\pi^2}\tilde{m}^4 \,\ln\frac{1+\sqrt{1+\tilde{m}^2}}{\tilde{m}} + \\ &- \tilde{g}\tilde{m}^2 \frac{1}{4\pi^4}\left(\sqrt{1+\tilde{m}^2} - \tilde{m}^2 \,\ln\frac{1+\sqrt{1+\tilde{m}^2}}{\tilde{m}}\right)^2 \end{aligned}$$

Diese Formel ist am Ende des Kapitels graphisch aufgetragen.

Im nun folgenden Abschnitt wollen wir auf die *Bogoljubov-Transformation* eingehen, mit denen man Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu einer gegebenen 1-Teilchen-Basis des Hilbertraums in solche zu einer anderen Basis umrechnen kann. Um eine geeignete diskrete Orthonormal-Basis von Impuls-Eigenzuständen zu erhalten, verwenden wir die Boxnormierung (alle Konventionen konsistent zu *Itzykson-Zuber QFT S.124*)

$$\begin{aligned} \psi^m(x) &= \sum_{k,s} \left(U^m_{k,s}(x)\, B_{m,k,s} + V^m_{k,s}(x)\, D^+_{m,k,s} \right) \\ \left\langle U^m_{k,s} \middle| U^m_{k',s'} \right\rangle &= \delta_{k,k'}\, \delta_{s,s'} \\ \left\langle V^m_{k,s} \middle| V^m_{k',s'} \right\rangle &= \delta_{k,k'}\, \delta_{s,s'} \\ \{B_{m,k,s}\,,\, B^+_{m,k',s'}\} &= \delta_{k,k'}\, \delta_{s,s'} \\ \{D_{m,k,s}\,,\, D^+_{m,k',s'}\} &= \delta_{k,k'}\, \delta_{s,s'} \end{aligned}$$

wobei der Zusammenhang zur üblichen (kontinuierlichen) Notation hergestellt wird durch

$$
\begin{aligned}
B_{m,k,s} &= \sqrt{\frac{m}{V\,k^0}}\, b_{m,s}(k) \\
D_{m,k,s} &= \sqrt{\frac{m}{V\,k^0}}\, d_{m,s}(k) \\
U^m_{k,s}(x) &= \sqrt{\frac{m}{V\,k^0}}\, u^m_s(k)\, e^{-ikx} \\
V^m_{k,s}(x) &= \sqrt{\frac{m}{V\,k^0}}\, v^m_s(k)\, e^{+ikx} \\
\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} &\to \frac{1}{V}\sum_k
\end{aligned}
$$

Dabei kennzeichnet m die Masse des erzeugten Zustandes. Um den Zusammenhang zwischen dem Fockraum zur Masse 0 und zur Masse m herzustellen, setzen wir o.B.d.A. für $t = 0$ an

$$\psi^m(0,\vec{x}) = \psi^0(0,\vec{x})$$

und analog für $(\psi^m)^+$. Damit sind die richtigen Antivertauschungsrelationen für die Feldoperatoren gesichert. Nun multipliziert man von links mit $(U^m_{k,s})^+(0,\vec{x})$ bzw. $(V^m_{k,s})^+(0,\vec{x})$ und integriert über d^3x. Eine etwas längere Rechnung ergibt dann

$$
\begin{aligned}
\int d^3x\; (U^m_{k,s})^+(0,\vec{x})\; U^0_{k',s'}(0,\vec{x}) &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{|\vec{k}|}{k^0}\right)}\; \delta_{k,k'}\,\delta_{s,s'} \\
\int d^3x\; (V^m_{k,s})^+(0,\vec{x})\; V^0_{k',s'}(0,\vec{x}) &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{|\vec{k}|}{k^0}\right)}\; \delta_{k,k'}\,\delta_{s,s'}
\end{aligned}
$$

und wir erhalten für die Bogoljubov-Transformation

$$
\begin{aligned}
B_{m,k,s} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{|\vec{k}|}{k^0}\right)}\, B_{0,k,s} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{|\vec{k}|}{k^0}\right)}\, D^+_{0,-k,s} \\
D_{m,k,s} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{|\vec{k}|}{k^0}\right)}\, D_{0,k,s} - \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{|\vec{k}|}{k^0}\right)}\, B^+_{0,-k,s}
\end{aligned}
$$

Man rechnet leicht nach, daß die richtigen Antivertauschungsrelationen erfüllt sind.

Wir betrachten nun den Zusammenhang zwischen dem Diracsee (als Näherung für das Vakuum) $|0^0\rangle$ zur Masse 0 und $|0^m\rangle$ zur Masse m. Diese Zustände sind definiert durch die Bedingung

$$\begin{array}{cc} B_{0,k,s}\left|0^0\right\rangle = 0 & D_{0,k,s}\left|0^0\right\rangle = 0 \\ B_{m,k,s}\left|0^m\right\rangle = 0 & D_{m,k,s}\left|0^m\right\rangle = 0 \end{array}$$

Um aus dem Vakuum zur Masse 0 das Vakuum zur Masse m zu gewinnen, muß man also alle Zustände zur Masse m, die in $|0^0\rangle$ vorkommen, vernichten und erhält

$$\begin{aligned} |0^m\rangle &= -\prod_{k,s} B_{m,k,s}\, D_{m,-k,s}\left|0^0\right\rangle = \\ &= N\prod_{k,s}\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{|\vec{k}|}{k^0}\right)} - \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{|\vec{k}|}{k^0}\right)}\, B^+_{0,k,s} D^+_{0,-k,s}\right)\left|0^0\right\rangle \end{aligned}$$

mit einer Normierungskonstante N. In der Basis zur Masse 0 müssen unendlich viele Teilchen-Antiteilchen-Paare mit Masse 0 erzeugt werden, um den masselosen Diracsee in den Diracsee zur Masse m überzuführen. Man kann von dem einen Vakuum nicht mit endlich vielen Erzeugern und Vernichtern zum anderen Vakuum gelangen, so daß die zugehörigen Fockräume nicht überlappen.

Da für große Kopplungskonstanten der Diracsee zur Masse m die bessere Näherung für das Vakuum ist als der Diracsee zur Masse 0, sind auch die darauf aufgebauten N-Teilchenzustände (also der Fockraum mit endlich vielen 'Quasi'-Teilchen) zur Masse m besser zur Beschreibung von Anregungszuständen geeignet. Man kann den dadurch noch nicht berücksichtigten Teil der WW nun in Störungstheorie behandeln, wobei die Quarkpropagatoren in den Feynmanregeln jetzt freie Propagatoren zur Masse m sind. Die Zustände des Fockraums sind nicht mehr chiral invariant, obwohl die Lagrangedichte es war (spontane Symmetriebrechung).

Figuren:

- Graphische Darstellung der Gapgleichung, wobei $\tilde{g} = g\Lambda^2$ als Funktion von $\tilde{m} = m/\Lambda$ aufgetragen ist.
- Vakuum-Energie-Erwartungswert $\langle\, 0 \mid H \mid 0 \,\rangle / (V\Lambda^4)$ als Funktion von $\tilde{g}$ und $\tilde{m}$. Das Minimum davon definiert zu jedem gegebenem $\tilde{g}$ ein optimales $\tilde{m}$, so wie es die Gapgleichung angibt.
- Vakuum-Energie-Erwartungswert $\langle\, 0 \mid H \mid 0 \,\rangle / (V\Lambda^4)$ als Funktion von $\tilde{m}$ zu verschiedenen $\tilde{g}$.
- Vakuum-Energie-Erwartungswert des freien masselosen Diracterms $\left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}\vec{\gamma}\vec{p}\psi \,\middle|\, 0 \right\rangle / \Lambda^4$ (durchgezogene Linie) sowie des Wechselwirkungsterms mit $\tilde{g} = 10$, d.h. $-10 \left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}\psi \,\middle|\, 0 \right\rangle^2 / \Lambda^6$ (gestrichelte Linie), als Funktion von $\tilde{m}$.